



例題と解説

例題 1

次の問いに答えなさい。

- (1) 72と180の公約数をすべて求めなさい。
- (2) 72と180の公約数すべての和を求めなさい。

答え (1) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 (2) 91

[例題 1 の解説]

- (1) 72と180の最大公約数は36です。

「公約数は最大公約数の約数」なので、36の約数が72と180の公約数です。

36の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

- (2) $1+2+3+4+6+9+12+18+36=91$

※「公約数は最大公約数の約数」はとても重要なので忘れないようにしましょう。

また、同じように「公倍数は最小公倍数の倍数」です。



例題と解説

例題2

整数Aと120の最大公約数は24、最小公倍数は840です。Aを求めなさい。

答え 168

[例題2の解説]

連除法で書き表してみると、右図のようになります。

※連除法は「すだれ算」,「はしご算」などと呼ばれることもあります。

$$\begin{array}{r} 24 \quad) \quad A \quad 120 \\ \hline \quad \quad \bigcirc \quad \square \end{array}$$

最大公約数は24なので右図でこれより下に進むことはありません。

つまり○と□は1以外の公約数を持っていません。

最小公倍数は840なので $24 \times \bigcirc \times \square = 840$ より $\bigcirc \times \square = 840 \div 24 = 35$ となります。

また $120 \div 24 = \square$ なので $\square = 120 \div 24 = 5$ であることがわかります。

$\bigcirc \times \square = 35$ なので $\bigcirc = 35 \div 5 = 7$

よって $A = 24 \times 7 = 168$



例題と解説

例題 3

2つの整数 A , B があります。 A と B の最大公約数は15、最小公倍数は300です。 A と B の組み合わせをすべて求めなさい。
ただし A よりも B のほうが大きいものとします。

答え $(15, 300)$, $(60, 75)$

[例題 3 の解説]

連除法で書き表してみると、右図 1 のようになります。

最大公約数が15なのでこれより下に進むことはありません。

つまり○と□は1以外に公約数を持っていません。

最小公倍数は300なので $15 \times \bigcirc \times \square = 300$ より $\bigcirc \times \square = 300 \div 15 = 20$

$\bigcirc \times \square = 20$ なので ○と□の組み合わせは20の約数のペアになります。

また、 A よりも B のほうが大きいので、○よりも□のほうが大きくなります。

図 2 より (○ , □) の組み合わせは $(1, 20)$, $(2, 10)$, $(4, 5)$ が考えられます。

ただし○と□は1以外に公約数を持っていないので $(2, 10)$ はあてはまりません。

よって (○ , □) の組み合わせは $(1, 20)$, $(4, 5)$

(○ , □) = $(1, 20)$ のとき $A = 15 \times 1 = 15$, $B = 15 \times 20 = 300$ なので $(A, B) = (15, 300)$

(○ , □) = $(4, 5)$ のとき $A = 15 \times 4 = 60$, $B = 15 \times 5 = 75$ なので $(A, B) = (60, 75)$

図 1

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) \begin{array}{cc} A & B \\ \hline \bigcirc & \square \end{array}} \end{array}$$

図 2

	1	2	4
20の約数	20	10	5



例題と解説

例題 4

2桁の整数 A , B があります。 A と B の最大公約数は8、最小公倍数は560です。 A と B をそれぞれ求めなさい。
ただし A よりも B のほうが大きいものとします。

答え $A=56$, $B=80$

[例題 4 の解説]

連除法で書き表してみると、右図 1 のようになります。

最大公約数が8なのでこれより下に進むことはありません。

つまり○と□は1以外に公約数を持っていません。

図 1

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) \begin{array}{cc} A & B \\ \hline \bigcirc & \square \end{array}} \end{array}$$

最小公倍数は560なので $8 \times \bigcirc \times \square = 560$ より $\bigcirc \times \square = 560 \div 8 = 70$

$\bigcirc \times \square = 70$ なので ○と□の組み合わせは70の約数のペアになります。

また、 A よりも B のほうが大きいので、○よりも□のほうが大きくなります。

図 2

	1	2	5	7
70の約数	70	35	14	10

図 2 より (○ , □) の組み合わせは (1 , 70) , (2 , 35) , (5 , 14) , (7 , 10) が考えられます。

ここで**整数 A , B は「2桁」**であるという条件に着目します。

この条件にあてはまる (○ , □) の組み合わせは (7 , 10) しかありません。

よって $A=8 \times 7=56$, $B=8 \times 10=80$

※問題文の初めに書かれている条件は見落としやすいので注意しましょう。



例題と解説

例題 5

30と整数Aの最小公倍数は90です。Aをすべて求めなさい。

答え 9, 18, 45, 90

[例題 5 の解説]

30とAの最大公約数を Δ とします。

このとき連除法で書き表してみると、右図1 のようになります。

最大公約数が Δ なのでこれより下に進むことはありません。

つまり $\bigcirc$ と $\square$ は1以外に公約数を持っていません。

図 1

$$\begin{array}{r} \Delta \overline{) \quad 30 \quad A} \\ \underline{\quad \quad} \\ \bigcirc \quad \square \end{array}$$

最小公倍数は90なので $\Delta \times \bigcirc \times \square = 90$ となります。

また $\Delta \times \bigcirc = 30$ なので $\square = (\Delta \times \bigcirc \times \square) \div (\Delta \times \bigcirc) = 90 \div 30 = 3$

よって図2 のようになります。

図 2

$$\begin{array}{r} \Delta \overline{) \quad 30 \quad A} \\ \underline{\quad \quad} \\ \bigcirc \quad 3 \end{array}$$

$\Delta \times \bigcirc = 30$ より $\bigcirc$ は30の約数です。

30の約数は図3より 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

図 3

	1	2	3	5
30の約数	30	15	10	6

図2でこれより下に進んではいけないので、 $\bigcirc$ と3は1以外の公約数を持っていません。

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 のうち、この条件にあてはまるのは 1, 2, 5, 10 です。

よって $\bigcirc$ は 1, 2, 5, 10 があてはまります。

$\Delta \times \bigcirc = 30$ より $\bigcirc = 1$ のとき $\Delta = 30$ となり、このとき $A = \Delta \times 3 = 30 \times 3 = 90$

$\bigcirc = 2$ のとき $\Delta = 15$ となり、このとき $A = \Delta \times 3 = 15 \times 3 = 45$

$\bigcirc = 5$ のとき $\Delta = 6$ となり、このとき $A = \Delta \times 3 = 6 \times 3 = 18$

$\bigcirc = 10$ のとき $\Delta = 3$ となり、このとき $A = \Delta \times 3 = 3 \times 3 = 9$

よってAは 9, 18, 45, 90



例題と解説

例題 6

2つの整数 A , B の和は150で最大公約数は30です。 A と B の組み合わせをすべて求めなさい。
ただし A よりも B のほうが大きいものとします。

答え $(30, 120)$, $(60, 90)$

[例題 6 の解説]

連除法で書き表してみると、右図のようになります。

最大公約数が30なのでこれより下に進むことはありません。

つまり○と□は1以外に公約数を持っていません。

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) \begin{array}{cc} A & B \\ \hline \circ & \square \end{array}} \end{array}$$

このとき $A=30 \times \circ$, $B=30 \times \square$

A と B の和は150なので $A+B=30 \times \circ + 30 \times \square = 30 \times (\circ + \square) = 150$

よって $\circ + \square = 150 \div 30 = 5$

A よりも B のほうが大きいので○よりも□のほうが大きいということになります。

よって○と□の組み合わせは $(1, 4)$, $(2, 3)$

※どちらの組み合わせも1以外の公約数を持たないので、上図の連除法で「これより下に進まない」という条件を満たします。

$(\circ, \square) = (1, 4)$ のとき $A = 30 \times 1 = 30$, $B = 30 \times 4 = 120$ $(A, B) = (30, 120)$

$(\circ, \square) = (2, 3)$ のとき $A = 30 \times 2 = 60$, $B = 30 \times 3 = 90$ $(A, B) = (60, 90)$



例題と解説

例題 7

2桁の整数 A , B があります。 A と B の積は1944で、最大公約数は9です。 A と B をそれぞれ求めなさい。
ただし A よりも B のほうが大きいものとします。

答え $A=27$, $B=72$

[例題 7 の解説]

連除法で書き表してみると、右図 1 のようになります。

最大公約数が9なのでこれより下に進むことはありません。

つまり○と□は1以外に公約数を持っていません。

このとき $A=9\times○$, $B=9\times□$

A と B の積は1944なので $A\times B=9\times○\times 9\times□=81\times○\times□=1944$

よって $○\times□=1944\div 81=24$

A よりも B のほうが大きいので○よりも□のほうが大きいということになります。

よって○と□の組み合わせは図 2 より (1 , 24) , (2 , 12) , (3 , 8) , (4 , 6) が考えられます。

このうち図 1 の連除法で「これより下に進まない」という条件にあてはまる○と□の組み合わせは (1 , 24) , (3 , 8)

さらに整数 A と B は2桁でなければならないので、この条件にあてはまる○と□の組み合わせは (3 , 8)

よって $A=9\times 3=27$, $B=9\times 8=72$

※ 右図 3 のような場合を考えると

(整数 A と B の積)=(A と B の最大公約数) $\times$ (A と B の最小公倍数) という関係が成り立ちます。

この問題で確認しておきましょう。(A と B の最大公約数) $=9$, (A と B の最小公倍数) $=216$

$9\times 216=1944$ より $A\times B$ と等しくなっていることがわかります。

ただし3つの整数の場合にはこの関係が成り立ちません。

図 1

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) \begin{array}{cc} A & B \\ \hline \bigcirc & \square \end{array}} \end{array}$$

図 2

	1	2	3	4
24の約数	24	12	8	6

図 3

$$\begin{array}{r} \triangle \overline{) \begin{array}{cc} A & B \\ \hline \bigcirc & \square \end{array}} \end{array}$$

最大公約数 $=\triangle$

最小公倍数 $=\triangle\times\bigcirc\times\square$

$A=\triangle\times\bigcirc$

$B=\triangle\times\square$

$$\begin{aligned} A\times B &= \text{最大公約数}\times\text{最小公倍数} \\ &= \triangle\times\triangle\times\bigcirc\times\square \end{aligned}$$



例題と解説

例題 8

48と72と整数Aの最大公約数は12、最小公倍数は720です。Aをすべて求めなさい。

答え 60, 180

[例題 8 の解説]

48と72とAの3つの整数の連除法を考えます。

このとき最大公約数は3つとも割り切れなければ下に進むことはできませんが、

最小公倍数は3つのうち2つが割り切れれば下に進む(進まなければならない)ことに注意しましょう。

最大公約数を求める場合と最小公倍数を求める場合の連除法を分けて考えます。

まず最大公約数を求める場合の連除法は右図 1 のようになります。

このときこれより下に進むことはありません。

つまり4と6は2で割ることができるので、□は2で割ることはできません。

図 1 最大公約数

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) \quad 48 \quad 72 \quad A} \\ \underline{\quad 4 \quad 6 \quad \square} \end{array}$$

次に最小公倍数を求める場合の連除法を考えます。

まず4と6は2で割ることができるので、図 2 のような場合が考えられます。

このとき□はそのまま下に下ろします。

最小公倍数が720なので $12 \times 2 \times 2 \times 3 \times \square = 720$ より $\square = 5$

よって $A = 12 \times \square$ より $A = 12 \times 5 = 60$ がまずあてはまることがわかります。

図 2 最小公倍数

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) \quad 48 \quad 72 \quad A} \\ 2 \overline{) \quad 4 \quad 6 \quad \square} \\ \underline{\quad 2 \quad 3 \quad \square} \end{array}$$

次に図 2 からさらに下に進んだ場合も考えます。

つまり□が3で割り切れる場合です。2はそのまま下に下ろして図 3 のようになります。

□は2の倍数ではないので、○も2の倍数ではありません。

つまりこれより下に進むことは考えられません。

最小公倍数が720なので $12 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times \bigcirc = 720$ より $\bigcirc = 5$

よって $\square = 3 \times \bigcirc$ より $\square = 3 \times 5 = 15$

$A = 12 \times \square$ より $A = 12 \times 15 = 180$ もあてはまることがわかります。

図 3 最小公倍数

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) \quad 48 \quad 72 \quad A} \\ 2 \overline{) \quad 4 \quad 6 \quad \square} \\ 3 \overline{) \quad 2 \quad 3 \quad \square} \\ \underline{\quad 2 \quad 1 \quad \bigcirc} \end{array}$$



ポイントまとめ

- ・ 公約数は最大公約数の約数，公倍数は最小公倍数の倍数
- ・ 最大公約数や最小公倍数からAやBといった整数を求める場合はまず連除法で書き表して情報を整理しましょう。
- ・ 最大公約数を求める場合の連除法では最大公約数で割ればそれより下に進むことはありません。
- ・ 問題文の初めに書かれている「2桁の整数」といった条件は見落としやすいので注意しましょう。
- ・ $(2つの整数AとBの積) = (AとBの最大公約数) \times (AとBの最小公倍数)$
ただし3つの整数の場合にはこの関係が成り立ちません。
- ・ 3個以上の整数の最大公約数を求める場合はすべて割り切れなければ下に進むことはできませんが、
最小公倍数は2個が割り切れれば下に進む(進まなければならない)ことに注意しましょう。