中学受験Unit.7- 2　5年　場合の数１
順列と組み合わせ2

例題と解説

例題１

次の問いに答えなさい。

（１）　$\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で4枚あります。この4枚のカードを並べかえて4桁の整数を作ります。整数は全部で何通り作ることができますか。

（２）　$\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で5枚あります。この5枚のカードを並べかえて5桁の整数を作ります。整数は全部で何通り作ることができますか。

（３）　$\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で6枚あります。この6枚のカードを並べかえて6桁の整数を作ります。整数は全部で何通り作ることができますか。

答え　（１）12通り（２）20通り（３）180通り

[例題１の解説]

（１）　同じものがある順列なのでP(パーミュテーション)で$_4P_4$のように求めることはできません。

4桁の整数を書き出して数えます。数えやすいように千の位で場合分けします。

千の位が1の場合 … 1123 , 1132 , 1213 , 1231 , 1312 , 1321

千の位が2の場合 … 2113 , 2131 , 2311

千の位が3の場合 … 3112 , 3121 , 3211

よって4桁の整数は全部で $6+3+3=12$(通り)

(別解)

同じものがある順列を計算で求めます。

まず4枚のカードがすべて異なる数だとします。このとき4桁の整数は全部で $_4P_4=4\times3\times2\times1=24$(通り) です。

ただし実際は1のカードが2枚あるので、この2枚のカードを並べかえても同じ4桁の整数です。

異なる2枚のカードの並べかえは $_2P_2=2\times1=2$(通り) なので24通りを2で割って $24\div2=12$(通り)

1 , 1 , 2 , 3 のカードの並べかえは12通りであることがわかります。

例題と解説

（2）　$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で5枚あります。
1が3枚あるので、同じものがある順列です。

まず5枚のカードがすべて異なる数だとします。このとき5桁の整数は全部で　${}_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=120$(通り) です。
ただし実際は1のカードが3枚あるので、この3枚のカードを並べかえても同じ5桁の整数です。

異なる3枚のカードの並べかえは ${}_3P_3=3\times2\times1=6$(通り) なので120通りを6で割って $120\div6=20$(通り)
1，1，1，2，3 のカードの並べかえは20通りであることがわかります。

※万の位で場合分けして書き出して確認してみましょう。20通りになります。

（3）　$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で6枚あります。
1が2枚，2が2枚あるので、同じものがある順列です。

まず6枚のカードがすべて異なる数だとします。

このとき6桁の整数は全部で　${}_6P_6=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$(通り) です。
実際は1のカードが2枚あるので、この2枚のカードを並べかえても同じ6桁の整数です。

また2のカードも2枚あるので、この2枚のカードを並べかえても同じ6桁の整数です。

異なる2枚のカードの並べかえは ${}_2P_2=2\times1=2$(通り) です。
1のカードと2のカードでそれぞれ並べかえが2通りずつなので720を2で2回割ります。$720\div2\div2=180$(通り)

1，1，2，2，3，4 のカードの並べかえは180通りであることがわかります。

例題と解説

同じものがない順列(普通の順列) と 同じものがある順列 について整理しておきます。

同じものがない順列

（例）　A，B，C，D の4つの並べかえ … ${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$(通り)
※P(パーミュテーション)の計算で求めることができます。

同じものがある順列

（例）　A，A，B，C の4つの並べかえ … ${}_4P_4\div{}_2P_2=(4\times3\times2\times1)\div(2\times1)=12$(通り)
（例）　A，A，A，B の4つの並べかえ … ${}_4P_4\div{}_3P_3=(4\times3\times2\times1)\div(3\times2\times1)=4$(通り)
（例）　A，A，B，B の4つの並べかえ … ${}_4P_4\div({}_2P_2\times{}_2P_2)=(4\times3\times2\times1)\div(2\times1\times2\times1)=6$(通り)
（例）　A，A，A，B，C の5つの並べかえ … ${}_5P_5\div{}_3P_3=(5\times4\times3\times2\times1)\div(3\times2\times1)=20$(通り)
（例）　A，A，B，B，C の5つの並べかえ … ${}_5P_5\div({}_2P_2\times{}_2P_2)=(5\times4\times3\times2\times1)\div(2\times1\times2\times1)=30$(通り)
（例）　A，A，A，B，B の5つの並べかえ … ${}_5P_5\div({}_3P_3\times{}_2P_2)=(5\times4\times3\times2\times1)\div(3\times2\times1\times2\times1)=10$(通り)
（例）　A，A，A，A，B，B の6つの並べかえ … ${}_6P_6\div({}_4P_4\times{}_2P_2)=(6\times5\times4\times3\times2\times1)\div(4\times3\times2\times1\times2\times1)=15$(通り)

つまり同じものがある順列の計算は下図のようにすべて異なる場合の順列を、同じものの順列の積で割ります。

すべて異なる場合の順列

$$\frac{{}_{\bigcirc}P_{\bigcirc}}{{}_{\square}P_{\square}\times{}_{\triangle}P_{\triangle}\times{}_{☆}P_{☆}\ \cdots}$$

同じものを並べかえたときの順列

（例）　A，A，B，B，B，C，C の7つの並べかえ

$$\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{\underbrace{2\times1}_{\text{Aの並べかえ}}\times\underbrace{3\times2\times1}_{\text{Bの並べかえ}}\times\underbrace{2\times1}_{\text{Cの並べかえ}}}=210(\text{通り})$$

例題と解説

例題２

$\boxed{0}$ ，$\boxed{1}$ ，$\boxed{2}$ ，$\boxed{2}$ ，$\boxed{3}$ のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で5枚あります。
このうち4枚のカードを並べかえて4桁の整数を作ります。整数は全部で何通り作ることができますか。

答え 48通り

[例題２の解説]
まず4枚のカードの組み合わせを考えます。
(0 ，1 ，2 ，2) ，(0 ，1 ，2 ，3) ，(0 ，2 ，2 ，3) ，(1 ，2 ，2 ，3)

それぞれの場合について並びかえます。ただし0は千の位に使うことができないので注意しましょう。

(0 ，1 ，2 ，2) の場合 … 1022 ，1202 ，1220 ，2012 ，2021 ，2102 ，2120 ，2201 ，2210 … 9通り
(0 ，1 ，2 ，3) の場合 … 1023 ，1032 ，1203 ，1230 ，1302 ，1320 ，2013 ，2031 ，2103 ，2130 ，2301 ，2310
3012 ，3021 ，3102 ，3120 ，3201 ，3210 … 18通り
(0 ，2 ，2 ，3) の場合 … 2023 ，2032 ，2203 ，2230 ，2302 ，2320 ，3022 ，3202 ，3220 … 9通り
(1 ，2 ，2 ，3) の場合 … 1223 ，1232 ，1322 ，2123 ，2132 ，2213 ，2231 ，2312 ，2321
3122 ，3212 ，3221 … 12通り
※ (1 ，2 ，2 ，3) の場合は0がないので、**同じものがある順列**の計算でも求めることができます。

$_4P_4 \div {}_2P_2 = (4\times3\times2\times1)\div(2\times1) = 12$(通り)

よって全部で 9＋18＋9＋12＝48(通り)

例題と解説

例題３

次の問いに答えなさい。

（１）　AとBの2人で1回だけじゃんけんをします。2人の手の出し方は何通りありますか。

（２）　表と裏のあるコインを5回投げます。表裏の出方は何通りありますか。

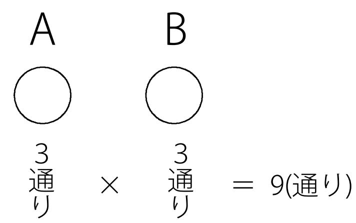
答え　（１）9通り（２）32通り

[例題３の解説]

（１）　じゃんけんには グー，チョキ，パー の3通りの手の出し方があります。

AとBの2人なので 3×3＝9(通り)

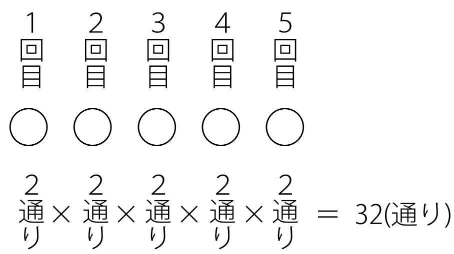
※ 3＋3＝6(通り) としないようにしましょう。



（２）　1回投げるごとに表と裏の2通りずつあります。

5回投げるので 2×2×2×2×2＝32(通り)

※ 2×5＝10(通り) としないようにしましょう。



例題と解説

例題４

グループPには Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ の5人がいます。グループQには Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｉ の4人がいます。

グループPから3人を選び、グループQから2人を選んでグループRを作ります。グループRの作り方は何通りありますか。

答え 60通り

[例題４の解説]

グループPの5人から3人を選ぶ選び方は $_5C_3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$(通り)

グループQの4人から2人を選ぶ選び方は $_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$(通り)

よってグループRの作り方は 10×6＝60(通り)

※ 10＋6＝16(通り) としないようにしましょう。

例題と解説

例題５

$\boxed{1}$ ，$\boxed{2}$ ，$\boxed{3}$ ，$\boxed{4}$ ，$\boxed{5}$ ，$\boxed{6}$ のカードがそれぞれ1枚ずつ全部で6枚あり、これらのカードを箱Pと箱Qに入れて分けます。ただし箱P，Qのそれぞれには少なくとも2枚のカードを入れます。$\boxed{1}$と$\boxed{2}$が同じ箱に入らないような分け方は何通りありますか。

答え 28通り

[例題５の解説]

次のように場合分けをします。

Pに4枚，Qに2枚の場合

Pに1，Qに2の場合 … 1□□□，2□ … 残り4枚からQに入る1枚を選ぶので 4通り

Pに2，Qに1の場合 … 2□□□，1□ … 残り4枚からQに入る1枚を選ぶので 4通り

Pに3枚，Qに3枚の場合

Pに1，Qに2の場合 … 1□□，2□□ … 残り4枚からPに入る2枚を選ぶので ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$(通り)

Pに2，Qに1の場合 … 2□□，1□□ … 残り4枚からPに入る2枚を選ぶので ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$(通り)

Pに2枚，Qに4枚の場合

Pに1，Qに2の場合 … 1□，2□□□ … 残り4枚からPに入る1枚を選ぶので 4通り

Pに2，Qに1の場合 … 2□，1□□□ … 残り4枚からPに入る1枚を選ぶので 4通り

よって全部で $4\times2+6\times2+4\times2=28$(通り)

例題と解説

ポイントまとめ

・同じものがある順列

（例）　A，A，A，B の4つの並べかえ … ${}_4P_4 \div {}_3P_3 = (4\times3\times2\times1)\div(3\times2\times1) = 4$(通り)

（例）　A，A，A，B，B の5つの並べかえ … ${}_5P_5 \div ({}_3P_3 \times {}_2P_2) = (5\times4\times3\times2\times1)\div(3\times2\times1\times2\times1) = 10$(通り)

すべて異なる場合の順列

$$\frac{{}_{\bigcirc}P_{\bigcirc}}{{}_{\square}P_{\square} \times {}_{\triangle}P_{\triangle} \times {}_{\star}P_{\star} \cdots}$$

同じものを並べかえたときの順列

（例）　A，A，B，B，B，C，C の7つの並べかえ

$$\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{\underbrace{2\times1}_{\text{Aの並べかえ}}\times\underbrace{3\times2\times1}_{\text{Bの並べかえ}}\times\underbrace{2\times1}_{\text{Cの並べかえ}}} = 210(\text{通り})$$

・場合の数ではきちんと場合分けをすることができるかどうかが最も重要なポイントです。