



例題と解説

例題 1

1 個40円の商品 A と 1 個60円の商品 B と 1 個70円の商品 C をあわせて25個買ったところ、合計代金は1510円でした。
商品 B を商品 A の 3 倍の個数買ったとするとそれぞれ何個ずつ買いましたか。

答え A 4個, B 12個, C 9個

[例題 1 の解説]

つるかめ算ですが、3 種類なので「つるかめカブトムシ算」と言われることもあります。

(商品 A の個数) : (商品 B の個数) = 1 : 3 なので、A 1 個と B 3 個の平均は $(40 \times 1 + 60 \times 3) \div (1 + 3) = 55$ 円 です。
ここで A 1 個と B 3 個の平均を 1 個55円の商品 D とします。商品 D の個数は商品 A と商品 B の個数の合計です。

つるかめ算を利用します。

1 個55円の商品 D と 1 個70円の商品 C をあわせて25個買ったところ、合計代金が1510円になったということです。

$(1510 - 55 \times 25) \div (70 - 55) = 9$ 個 ← 商品 C の個数

$25 - 9 = 16$ 個 ← 商品 D の個数

(商品 D の個数) = (商品 A の個数) + (商品 B の個数) = 16 個

(商品 A の個数) : (商品 B の個数) = 1 : 3

よって (商品 A の個数) = $16 \times \frac{1}{1+3} = 4$ 個 , (商品 B の個数) = $16 \times \frac{3}{1+3} = 12$ 個

※ この問題では「A 1 個と B 3 個の平均を 1 個55円の商品 D」としていますが、
平均を求めたときに「55円」のような整数ではなく、小数や分数になることもあります。



例題と解説

(別解)

表を用いて考えます。

(商品Aの個数)：(商品Bの個数)＝1：3 なので商品A 1個と商品B 3個から始めて考えます。

商品A(40円)の個数 (個)	1	2	3	4	...
商品B(60円)の個数 (個)	3	6	9	12	...
商品C(70円)の個数 (個)	21	17	13	9	...
合計(円)	1690	1630	1570	1510	

上のようになるので 商品A 4個，商品B 12個，商品C 9個 となります。

※ 表を見ると合計金額が60円ずつ減っているのので、等差数列で考えることもできます。



例題2

1個50円の商品Aと1個80円の商品Bをあわせて何個か買ったところ、合計代金が2000円になりました。

このとき次の問いに答えなさい。

- (1) あわせて34個買ったとします。このとき商品Aは何個買いましたか。
- (2) 買わない商品があってもよいものとします。このとき商品Aと商品Bの買い方は全部で何通りありますか。
- (3) どちらも少なくとも1個は買ったとします。このとき商品Aと商品Bの買い方は全部で何通りありますか。

答え (1) 24個 (2) 6通り (3) 4通り

[例題2の解説]

- (1) つるかめ算です。

$$(\text{商品Aの個数}) = (80 \times 34 - 2000) \div (80 - 50) = 24 \text{個}$$

- (2) (商品Aの個数)=A, (商品Bの個数)=B とします。

このとき $50 \times A + 80 \times B = 2000$ という式になります。

式を簡単にするために、左右を10で割ります。

$$5 \times A + 8 \times B = 200$$

あてはまる(A, B) 探すと、まず(40, 0)が見つかります。

5と8の最小公倍数は40なのでAを $40 \div 5 = 8$ 個 減らして

Bを $40 \div 8 = 5$ 個 増やしても合計は200のまま変わりません。

よって右図のように他の組み合わせを見つけることができます。

買い方は全部で6通りあります。

$$\begin{array}{rcl} 5 \times A + 8 \times B & = & 200 \\ -8 \swarrow & & \searrow +5 \\ \begin{array}{cc} 40 & 0 \\ 32 & 5 \\ 24 & 10 \\ 16 & 15 \\ 8 & 20 \\ 0 & 25 \end{array} \end{array}$$

- (3) 少なくとも1個買う組み合わせは(2)の図より4通りです。



例題と解説

(参考)

(2)で $5 \times A + 8 \times B = 200$ という式があります。

仮に $A + B = 28$ ということがわかっていれば、つるかめ算を利用して

$$A = (8 \times 28 - 200) \div (8 - 5) = 8, \quad B = 28 - 8 = 20$$

という風に計算で答えを見つけることができます。

しかし $A + B$ がわかっていない場合は、単純につるかめ算で答えを求めることができません。

さらに答えを探しても、答えが1通りに決まるとは限らず、答えが複数ある場合があります。

このように、答えが1通りに決まるとは限らない、つるかめ算のような問題を
「不定方程式（ふていほうていしき）」と言います。

右図のように答えの1つがわかれば、他の答えは芋づる的に
次々と見つかるので、不定方程式の問題を中学受験算数では
「芋づる算」と呼ぶこともあります。

$$\begin{array}{rcl} & 5 \times A + 8 \times B = 200 \\ -8 \swarrow & \begin{array}{cc} 40 & 0 \\ 32 & 5 \\ 24 & 10 \\ 16 & 15 \\ 8 & 20 \\ 0 & 25 \end{array} & \searrow +5 \end{array}$$

不定方程式の問題は主に難関校で頻出です。答えの見つけ方に慣れておきましょう。



例題と解説

例題3

1個48円の商品Aと1個36円の商品Bと1個24円の商品Cをあわせて何個か買ったところ、合計代金が240円になりました。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 買い方は全部で何通りありますか。ただし買わない商品があってもよいものとします。
- (2) 買った個数は全部であわせて7個以下だったとします。このとき買い方は全部で何通りありますか。ただしどの商品も少なくとも1個は買うものとします。

答え (1) 14通り (2) 3通り

[例題3の解説]

- (1) (商品Aの個数)=A, (商品Bの個数)=B, (商品Cの個数)=C とします。

このとき $48 \times A + 36 \times B + 24 \times C = 240$ という式になります。

式を簡単にするために、左右を12で割ります。

$$4 \times A + 3 \times B + 2 \times C = 20$$

表で考えると次のようになります。

商品A(4)の個数 (個)	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0
商品B(3)の個数 (個)	0	0	2	0	4	2	0	4	2	0	6	4	2	0
商品C(2)の個数 (個)	0	2	1	4	0	3	6	2	5	8	1	4	7	10
合計 (個)	5	6	6	7	6	7	8	7	8	9	7	8	9	10

上の表のようになるので買い方は全部で14通りです。

※ 「10円玉と5円玉と1円玉を使って20円を支払う方法は何通りありますか。」という「場合の数の問題」の解き方と同じ方法を利用しています。



例題と解説

- (2) どの商品も少なくとも1個は買い、合計の個数が7個以下になる買い方は表の色をつけた場合です。

商品A(4)の個数 (個)	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0
商品B(3)の個数 (個)	0	0	2	0	4	2	0	4	2	0	6	4	2	0
商品C(2)の個数 (個)	0	2	1	4	0	3	6	2	5	8	1	4	7	10
合計 (個)	5	6	6	7	6	7	8	7	8	9	7	8	9	10

よって全部で3通りです。



例題と解説

例題 4

1 個90円の商品 A と 1 個150円の商品 B をあわせて25個買って、2800円以内にしたいと思います。商品 B をできるだけたくさん買うとすると、商品 B を何個買うことができますか。

答え 9 個

[例題 4 の解説]

表を利用します。商品 A を25個買う場合から始めます。

商品 A (90円)の個数 (個)	25	24	23	22	21	...
商品 B (150円)の個数 (個)	0	1	2	3	4	...
合計 (円)	2250	2310	2370	2430	2490	...

上の表から商品 A を 1 個減らして、商品 B を 1 個増やす、つまり A と B を 1 個交換すると合計は $150 - 90 = 60$ 円 高くなるのがわかります。

2800円以内にしたいので、2250円からまだ $2800 - 2250 = 550$ 円 高くなっても大丈夫です。

$550 \div 60 = 9$ あまり 10 なので 9 個交換することができます。

よって商品 A は $25 - 9 = 16$ 個 , 商品 B は 9 個買うことができます。



例題と解説

例題 5

1 個29円の商品 A と 1 個55円の商品 B をそれぞれ何個かずつ買ったところ、合計代金は1671円でした。
それぞれ何個ずつ買いましたか。

答え A 14個 , B 23個

[例題 5 の解説]

(商品 A の個数) = A , (商品 B の個数) = B とします。

このとき $29 \times A + 55 \times B = 1671$ という式になります。

商品 B を買えるだけ買うと $1671 \div 55 = 30$ あまり 21 より 30 個買うことができます。

あまりが 21 円なので、1671 円にするためにはまだ 21 円足りません。

商品 B 1 個を商品 A 1 個に交換すると $55 - 29 = 26$ なので合計代金は 26 円安くなってしまいます。

ここで商品 B 1 個を商品 A 2 個に交換することを考えます。

そうすると $29 \times 2 - 55 = 3$ より合計代金は 3 円高くなります。

表は次のようになります。

商品 A (29円) の個数 (個)	0	2	4	6	...	
商品 B (55円) の個数 (個)	30	29	28	27	...	
合計 (円)	1650	1653	1656	1659	...	1671

上の表より $(1671 - 1650) \div 3 = 7$

(商品 A の個数) = $0 + 2 \times 7 = 14$ 個

(商品 B の個数) = $30 - 1 \times 7 = 23$ 個



例題6

1個60円の商品Aと1個80円の商品Bと1個90円の商品Cと1個120円の商品Dがあります。このうち1種類は買わず、他の3種類をそれぞれ少なくとも1個は買って、合計25個買ったところ、合計代金が2170円になりました。買い方は全部で何通りありますか。

答え 6通り

[例題6の解説]

(商品Aの個数) $=A$, (商品Bの個数) $=B$, (商品Cの個数) $=C$, (商品Dの個数) $=D$ とします。

このとき $60 \times A + 80 \times B + 90 \times C + 120 \times D = 2170$ という式になります。

式を簡単にするために、左右を10で割ります。

$6 \times A + 8 \times B + 9 \times C + 12 \times D = 217$ ※ A, B, C, D のうちどれか1つは0です。

ここで倍数関係に着目します。

仮に $B=0$ のとき $6 \times A + 9 \times C + 12 \times D = 217$ となります。

6 , 9 , 12 はすべて3の倍数なので $6 \times A + 9 \times C + 12 \times D$ は3の倍数になりますが、217は3の倍数ではありません。よって $B=0$ ではありません。つまり商品Bは少なくとも1個は買います。

仮に $C=0$ のとき $6 \times A + 8 \times B + 12 \times D = 217$ となります。

6 , 8 , 12 はすべて2の倍数なので $6 \times A + 8 \times B + 12 \times D$ は2の倍数になりますが、217は2の倍数ではありません。よって $C=0$ ではありません。つまり商品Cは少なくとも1個は買います。

ここまでで、買っていない商品はAかDのどちらかであるということになります。



例題と解説

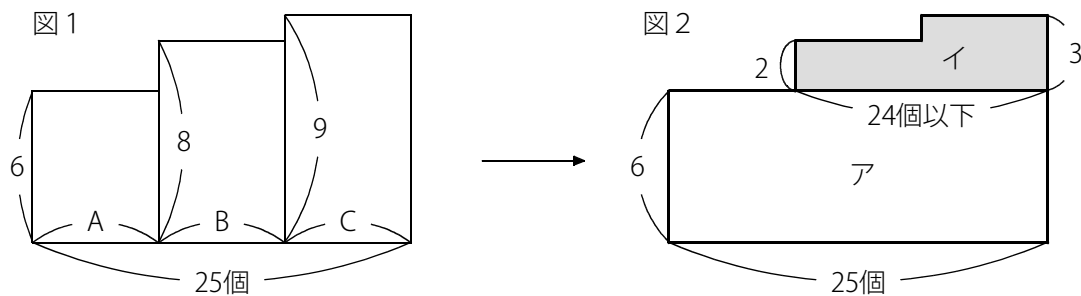
ではここで仮に買わない商品をDとします。買った商品をA, B, Cとして考えます。

このとき $60 \times A + 80 \times B + 90 \times C = 2170$ という式になります。

式を簡単にするために、左右を10で割ります。 $6 \times A + 8 \times B + 9 \times C = 217$ … 式①

合計で25個買うので $A + B + C = 25$ … 式②

3つのつるかめ算(不定方程式)を考えやすくするために、下図のように面積図を利用します。



上図1の面積は $6 \times A + 8 \times B + 9 \times C = 217$ です。

ここで上図2のように考えると $A = 6 \times 25 = 150$ なので $I = 217 - 150 = 67$ より $2 \times B + 3 \times C = 67$ となります。

またAは1個以上なので $B + C$ は24個以下です。

$$2 \times B + 3 \times C = 67$$

$B + C$ が24個以下であることに注意して、あてはまる (B, C) 探すと
まず $(2, 21)$ が見つかります。

2と3の最小公倍数は6なのでCを $6 \div 3 = 2$ 個 減らして
Bを $6 \div 2 = 3$ 個 増やしても合計は67のまま変わりません。

よって右図3のように他の組み合わせを見つけることができます。

A, B, Cの買い方は2通りあります。

図3

$$\begin{array}{rcl}
 2 \times B + 3 \times C & = & 67 \\
 +3 \swarrow \quad \quad \quad \searrow -2 & & \\
 \begin{array}{cc} 2 & 21 \\ 5 & 19 \end{array} & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 A = 25 - (2 + 21) = 2 \\
 A = 25 - (5 + 19) = 1
 \end{array}$$



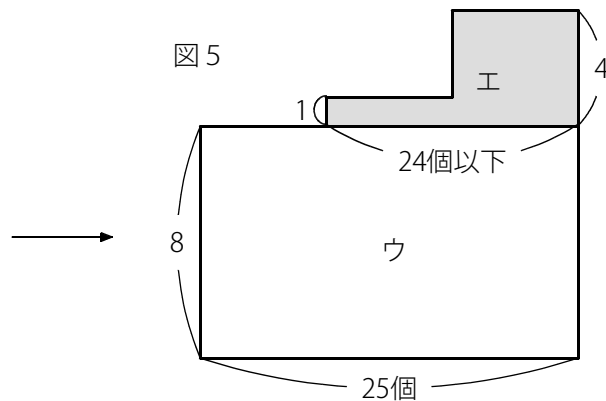
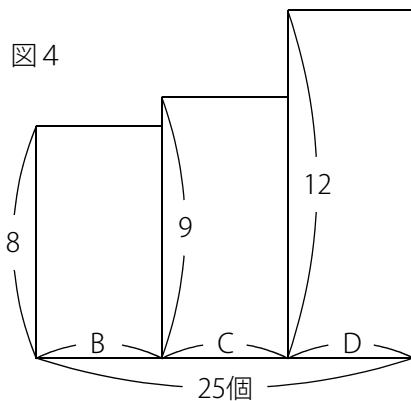
例題と解説

次に買わない商品をAとします。買った商品をB, C, Dとして考えます。

このとき $80 \times B + 90 \times C + 120 \times D = 2170$ という式になります。

式を簡単にするために、左右を10で割ります。 $8 \times B + 9 \times C + 12 \times D = 217$ … 式③

合計で25個買うので $B + C + D = 25$ … 式④



上図4の面積は $8 \times B + 9 \times C + 12 \times D = 217$ です。

ここで上図5のように考えると $A = 8 \times 25 = 200$ なので $E = 217 - 200 = 17$ より $1 \times C + 4 \times D = 17$ となります。

またBは1個以上なので $C + D$ は24個以下です。

$$1 \times C + 4 \times D = 17$$

あてはまる (C, D) 探すと、まず (1, 4) が見つかります。

1と4の最小公倍数は4なのでDを $4 \div 4 = 1$ 個 減らして

Cを $4 \div 1 = 4$ 個 増やしても合計は17のまま変わりません。

よって右図6のように他の組み合わせを見つけることができます。

B, C, Dの買い方は4通りあります。

図6

$$1 \times C + 4 \times D = 17$$

$$+4 \left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 9 & 2 \\ 13 & 1 \end{array} \right) -1$$

$$B = 25 - (1 + 4) = 20$$

$$B = 25 - (5 + 3) = 17$$

$$B = 25 - (9 + 2) = 14$$

$$B = 25 - (13 + 1) = 11$$

A, B, Cの買い方が2通り、B, C, Dの買い方が4通りなので、買い方は全部で $2 + 4 = 6$ 通り となります。



例題と解説

ポイントまとめ

- ・ 答えが1通りに決まるとは限らない、つるかめ算のような問題を「不定方程式（ふていほうていしき）」と言います。
- ・ 最小公倍数を利用して芋づる的に求めることができるので「芋づる算」と呼ばれることもあります。