



例題と解説

例題1

図1のような台形を底面とする四角柱を平面で切って、図2のような立体を作りました。

- (1) 図2のアの長さを求めなさい。
- (2) 図2の立体の体積を求めなさい。

図1

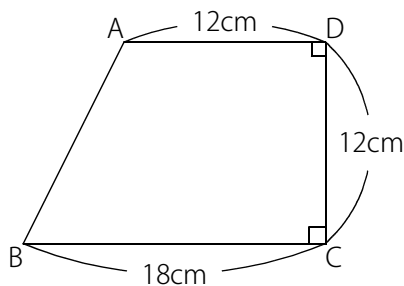
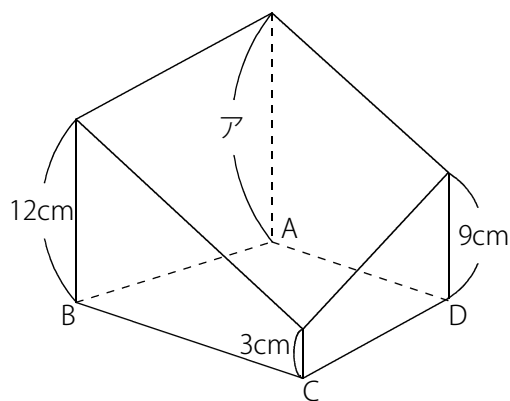


図2



答え (1) 15cm (2) 1728cm^3

[例題1の解説]

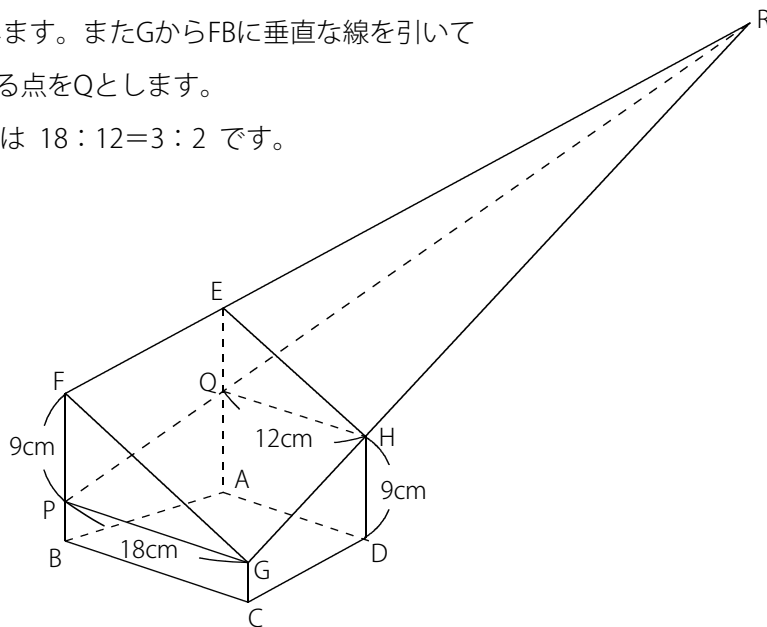
- (1) 右図のようにFEとGHを延長して交わる点をRとします。またGからFBに垂直な線を引いて交わる点をP, HからEAに垂直な線を引いて交わる点をQとします。
このとき三角形RPGと三角形RQHは相似で相似比は $18:12=3:2$ です。

RP : RQ = 3 : 2 で、三角形RFPと三角形REQは相似なので $FP : EQ = 3 : 2$

$$\text{よって } EQ = 9\text{cm} \times \frac{2}{3} = 6\text{cm}$$

QA = HD = 9cm なので

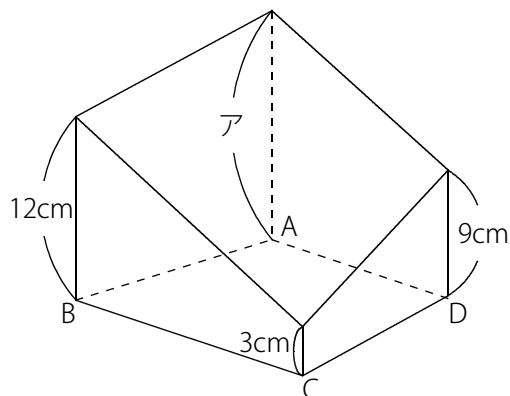
$$\text{ア} = EQ + QA = 6 + 9 = 15\text{cm}$$





例題と解説

※ 底面が台形なので $ア+3=12+9$ という式は成り立ちません。



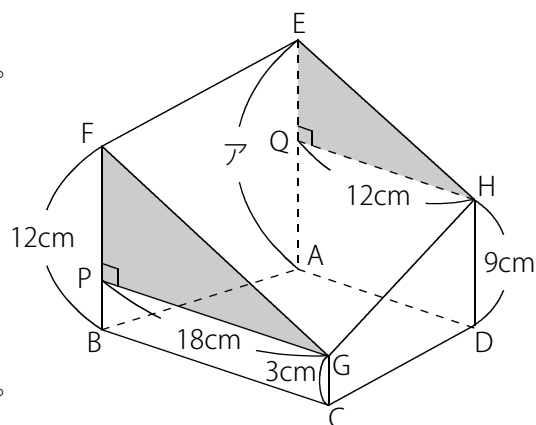
(別解)

右図のようにGを通過してBCと平行な直線をひき、FBと交わる点をP、
同様にHを通過してADと平行な直線をひき、EAと交わる点をQとします。
つまりPGとQHは平行です。

またFPとEQは底面ABCDに垂直なので平行です。

そしてEFGHは1つの切断面なのでFGとEHは平行です。

よって色のついた部分の三角形は3辺がそれぞれ平行なので相似です。



$PG : QH = 18\text{cm} : 12\text{cm} = 3 : 2$ なので相似比は $3 : 2$ です。

$FP = 12 - PB = 12 - GC = 12 - 3 = 9\text{cm}$ なので $EQ = 9 \times \frac{2}{3} = 6\text{cm}$

$ア = EQ + QA = 6 + HD = 6 + 9 = 15\text{cm}$



例題と解説

- (2) 底面が台形なので (底面積)×(高さの平均) で体積を求めることはできません。
そこで右図のように三角柱2つに分けます。

断頭三角柱の体積は (底面積)×(高さの平均) で求めることができます。

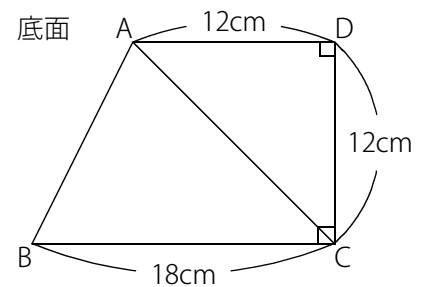
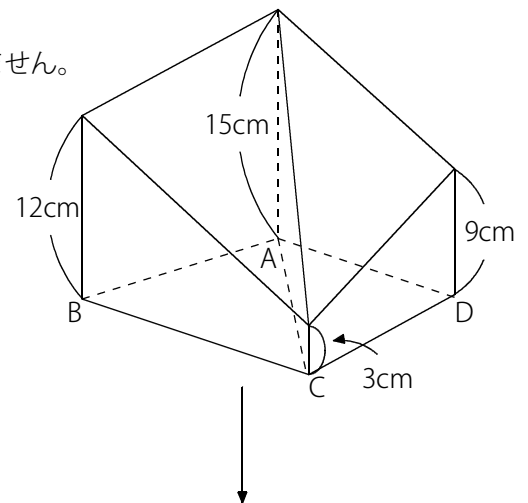
(左側の断頭三角柱の体積)

$$=(\text{三角形ABCの面積}) \times \frac{15+12+3}{3} = 18 \times 12 \div 2 \times 10 = 1080\text{cm}^3$$

(右側の断頭三角柱の体積)

$$=(\text{三角形ACDの面積}) \times \frac{15+9+3}{3} = 12 \times 12 \div 2 \times 9 = 648\text{cm}^3$$

$$\text{よって (体積)} = 1080 + 648 = 1728\text{cm}^3$$



※ (底面積)×(高さの平均) で計算をすると

$$(\text{体積}) = (\text{台形ABCD}) \times \frac{15+12+3+9}{4} = 180 \times 9.75 = 1755\text{cm}^3$$

となります。この解法は正しくありません。注意しましょう。

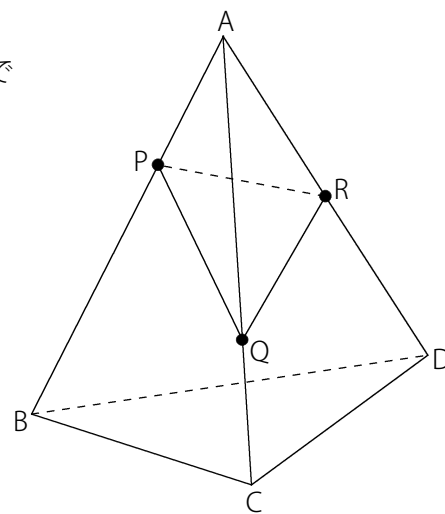


例題と解説

例題 2

右図のような三角すいA-BCDがあります。

AP : PB = 1 : 2 , AQ : QC = 9 : 4 , AR : RD = 1 : 1 となる 3 点PQRを通る平面で切ってできる三角すいA-PQRの体積は三角すいA-BCDの体積の何倍ですか。



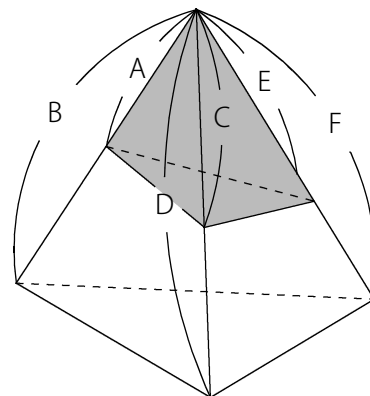
答え $\frac{3}{26}$ 倍

[例題 2 の解説]

三角すいの体積では次のことが成り立ちます。

右図で (色のついた部分の体積) = (全体の三角すい) $\times \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \times \frac{E}{F}$

※ 四角すいではこの公式は使えません。



この問題では AP : PB = 1 : 2 , AQ : QC = 9 : 4 , AR : RD = 1 : 1 なので

(三角すいA-PQRの体積)

$$= (\text{三角すいA-BCDの体積}) \times \frac{AP}{AB} \times \frac{AQ}{AC} \times \frac{AR}{AD} = (\text{三角すいA-BCDの体積}) \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{13} \times \frac{1}{2} = (\text{三角すいA-BCDの体積}) \times \frac{3}{26}$$

よって、三角すいA-PQRの体積は三角すいA-BCDの体積の $\frac{3}{26}$ 倍です。



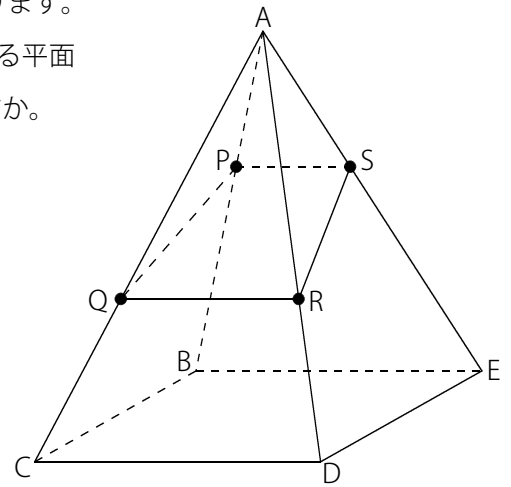
例題と解説

例題 3

底面が正方形で、4つの側面が合同な二等辺三角形の四角すいA-BCDEがあります。

$AP:PB=AS:SE=1:2$, $AQ:QC=AR:RD=3:2$ となる4点PQRSを通る平面

で切ることができる四角すいA-PQRSの体積は四角すいA-BCDEの体積の何倍ですか。



答え $\frac{7}{75}$ 倍

[例題 3 の解説]

右図のように三角すいA-BCDと三角すいA-BDEの2つに分けます。

もとの四角すいの底面は正方形なので、三角すいA-BCDと三角すいA-BDEの体積は

もとの四角すいの体積の $\frac{1}{2}$ です。

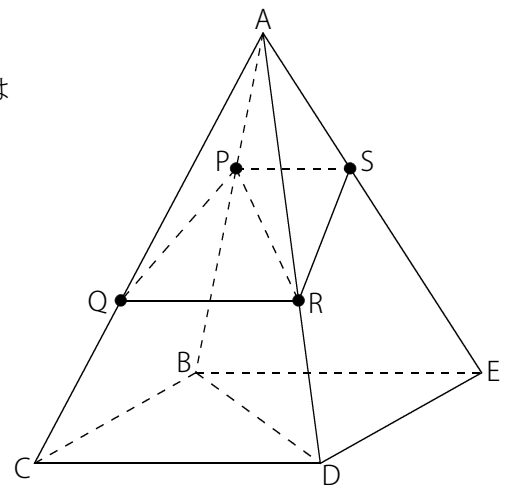
(三角すいA-PQRの体積)

$$=(\text{もとの四角すいの体積}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = (\text{もとの四角すいの体積}) \times \frac{3}{50}$$

(三角すいA-PRSの体積)

$$=(\text{もとの四角すいの体積}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = (\text{もとの四角すいの体積}) \times \frac{1}{30}$$

よって四角すいA-PQRSの体積は、四角すいA-BCDEの体積の $\frac{3}{50} + \frac{1}{30} = \frac{7}{75}$ 倍 であることがわかります。





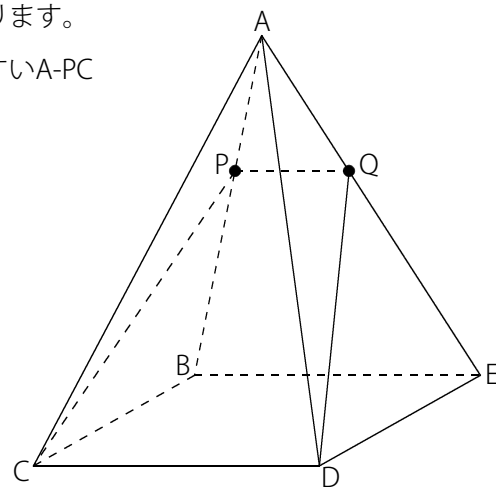
例題と解説

例題 4

底面が正方形で、4つの側面が合同な二等辺三角形の四角すいA-BCDEがあります。

AP:PB=AQ:QE=1:2 となる4点PQDCを通る平面で切ってできる四角すいA-PC

DQの体積は四角すいA-BCDEの体積の何倍ですか。



答え $\frac{2}{9}$ 倍

[例題 4 の解説]

右図のように三角すいA-BCDと三角すいA-BDEの2つに分けます。

もとの四角すいの底面は正方形なので、三角すいA-BCDと三角すいA-BDEの体積はもとの四角すいの体積の $\frac{1}{2}$ です。

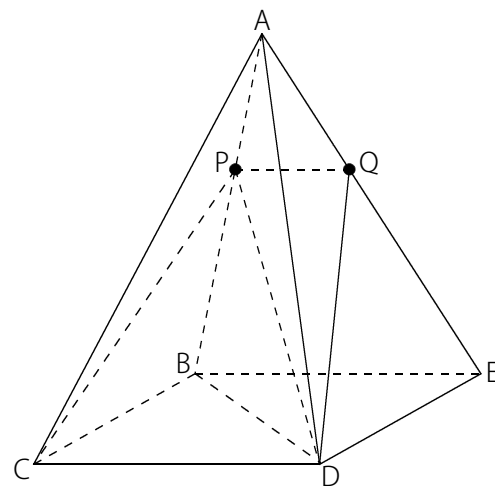
(三角すいA-PCDの体積)

$$=(\text{もとの四角すいの体積}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = (\text{もとの四角すいの体積}) \times \frac{1}{6}$$

(三角すいA-PDQの体積)

$$=(\text{もとの四角すいの体積}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = (\text{もとの四角すいの体積}) \times \frac{1}{18}$$

よって四角すいA-PCDQの体積は、四角すいA-BCDEの体積の $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$ 倍 であることがわかります。

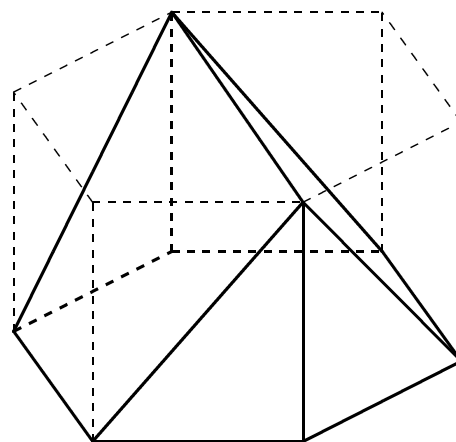




例題と解説

例題 5

正六角柱を平面で2回切って、右図のような立体を作りました。
この立体はもとの正六角柱の体積の何倍ですか。

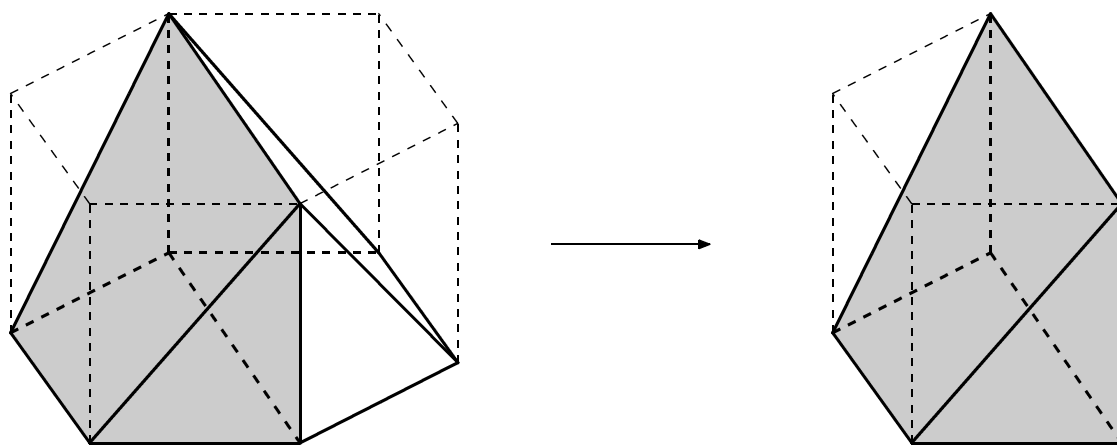


答え $\frac{5}{9}$ 倍

[例題 5 の解説]

「正○角柱」というのは底面が「正○角形」の角柱です。この問題では正六角柱なので底面が正六角形です。

下図のように立体の半分が全体のどれだけにあたるかを求めて、最後に2倍することになります。

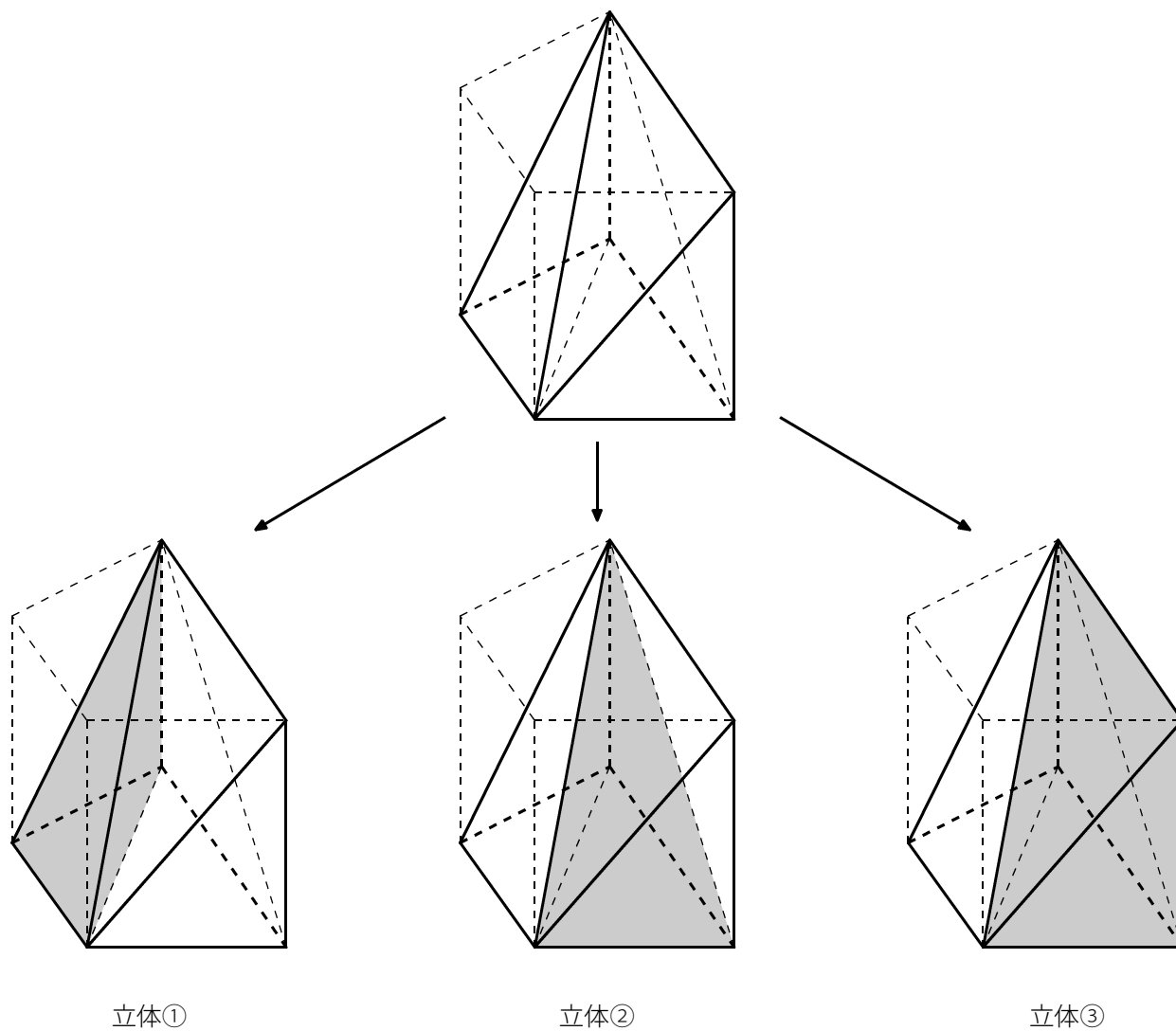




例題と解説

ここで下図のように立体を3つの立体①, 立体②, 立体③に分けます。

立体①, 立体②, 立体③はすべて三角すいです。



それぞれの立体がもとの正六角柱のどれだけにあたるかを求めます。



例題と解説

もとの正六角柱の底面積を 1 , 高さを 1 とします。
このとき (正六角柱の体積) $=1 \times 1 = 1$ となります。

右図 1 より (立体①の高さ) $=1$ です。

また底面は右図 2 のような形をしています。

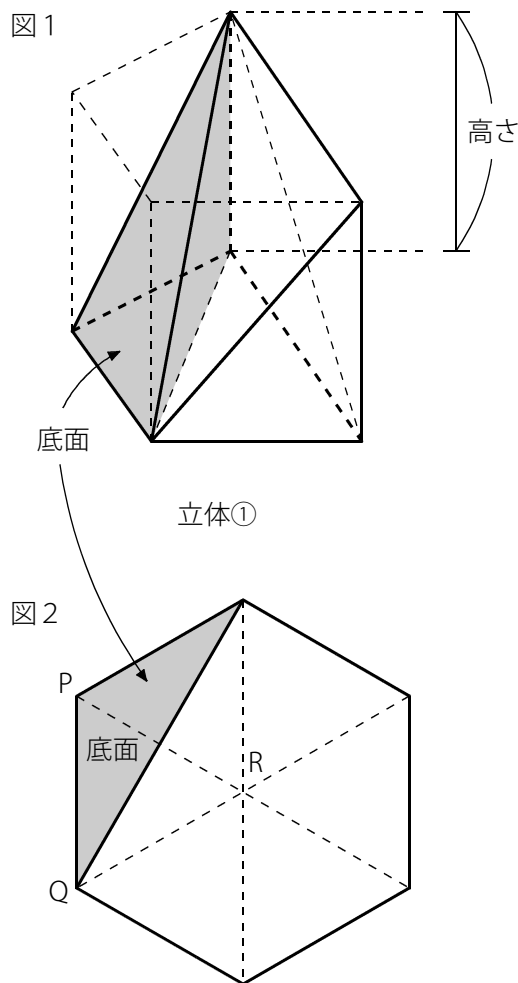
正六角形を 6 等分してできる正三角形PQRと比べると

底辺の長さが高さが等しいので (立体①の底面積) $=\frac{1}{6} \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$

※ この三角形が正六角形の $\frac{1}{6}$ であることは覚えておきましょう。

立体①は三角すいなので (体積) $=(\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}$ です。

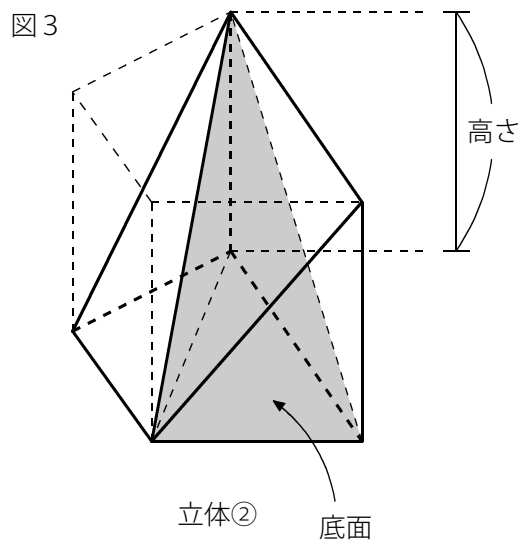
よって (立体①の体積) $=\frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$





例題と解説

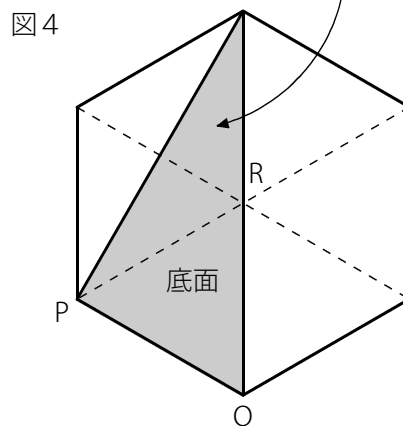
右図3より (立体②の高さ)=1 です。



また底面は右図4のような形をしています。

正六角形を6等分してできる正三角形PQRと比べると

底辺の長さは等しく、高さが2倍なので (立体②の底面積) = $\frac{1}{6} \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$



立体②は三角すいなので (体積) = (底面積) × (高さ) × $\frac{1}{3}$ です。

よって (立体②の体積) = $\frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

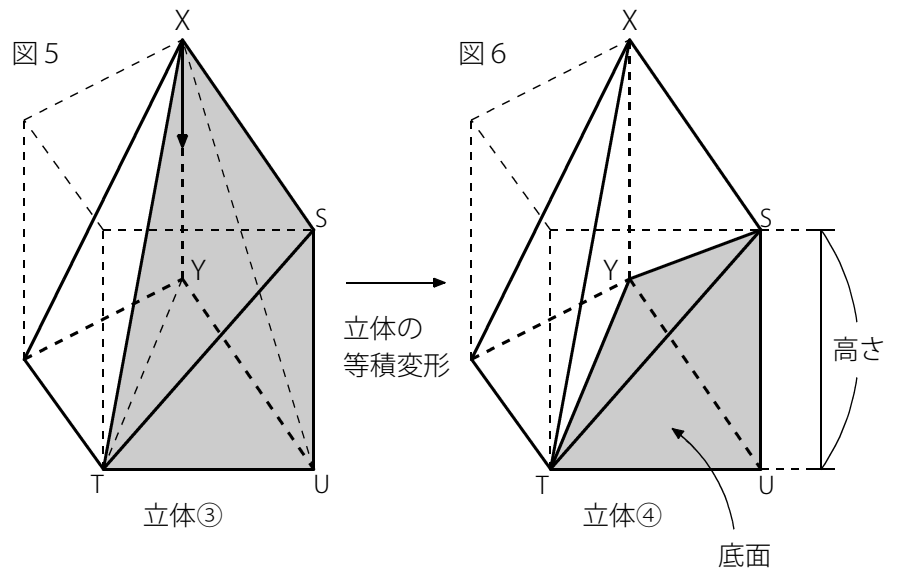


例題と解説

右図5の立体③を右図6の立体④のように等積変形します。

この等積変形では底面を三角形STUとして頂点Xを頂点Yに等積変形しています。

このとき底面は同じで、底面STUからの高さも同じなので、立体③と④の体積は同じです。



立体④の底面は右図7のような形をしています。

正六角形を6等分してできる正三角形PQRと比べると

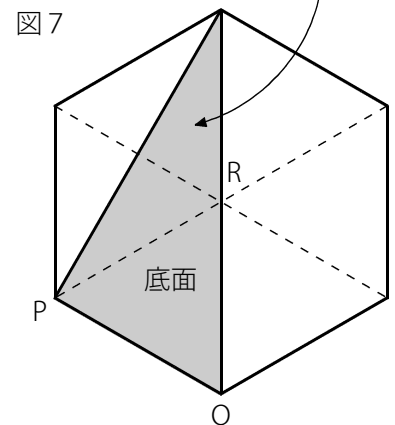
底辺の長さは等しく、高さが2倍なので (立体②の底面積) $= \frac{1}{6} \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$

立体④は三角すいなので (体積) $= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}$ です。

よって (立体③の体積) $= (\text{立体④の体積}) = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

(立体①の体積) $+ (\text{立体②の体積}) + (\text{立体③の体積}) = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$

この $\frac{5}{18}$ が切断してできる立体の半分なので、切断してできる立体の体積はもとの正六角柱の $\frac{5}{18} \times 2 = \frac{5}{9}$ 倍 となります。





例題と解説

ポイントまとめ

- ・角すいの切断は三角すいに分けて考えましょう。