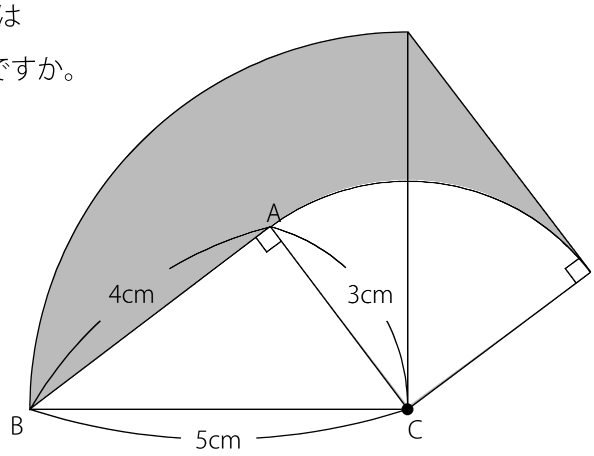
中学受験Unit.38- 1　5年　図形の回転移動２
回転と辺の軌跡

例題と解説

例題１

直角三角形ABCを点Cを中心に90度回転させると、辺ABが通る部分は右図の色のついた部分になります。色のついた部分の面積は何cm^2ですか。
ただし円周率は3.14とします。

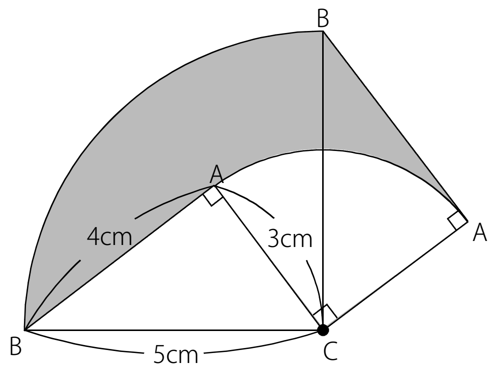


答え 12.56cm^2

[例題１の解説]

三角形ABCが点Cを中心に90度回転するので、辺BCと辺ACも点Cを中心に90度回転します。

全体の面積から白の部分の面積を引いて、色のついた部分の面積を求めます。



(全体の面積)＝(半径5cm，中心角90度のおうぎ形)＋(直角三角形ABC)

$=5\times5\times3.14\times\frac{1}{4}+3\times4\div2=\frac{25}{4}\times3.14+6$

(白の部分の面積)＝(半径3cm，中心角90度のおうぎ形)＋(直角三角形ABC)

$=3\times3\times3.14\times\frac{1}{4}+3\times4\div2=\frac{9}{4}\times3.14+6$

(色のついた部分の面積)$=\left(\frac{25}{4}\times3.14+6\right)-\left(\frac{9}{4}\times3.14+6\right)=\frac{16}{4}\times3.14=4\times3.14=12.56(cm^2)$

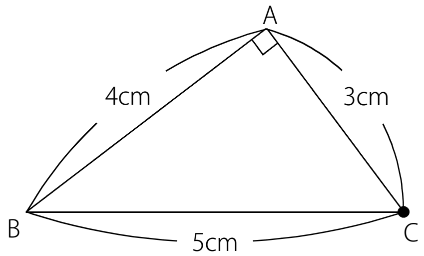
※ 最終的に (色のついた部分の面積)＝(半径5cm，中心角90度のおうぎ形)ー(半径3cm，中心角90度のおうぎ形)となります。つまり「三角形ABC」の面積がわからなくても、色のついた部分の面積を求めることができます。

例題と解説

例題２

下図のような直角三角形ABCを点Cを中心に180度回転させます。このとき辺ABが通る部分を色をつけて表しなさい。

またその部分の面積は何cm²ですか。ただし円周率は3.14とします。

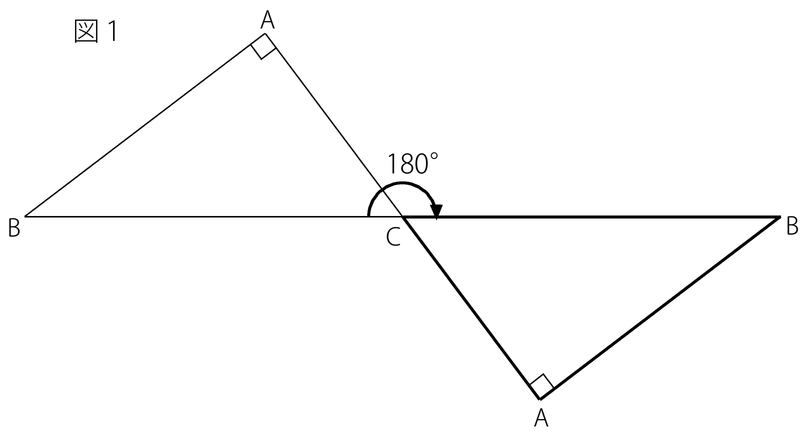


答え 25.12cm²

[例題２の解説]

まず右図１のように点Cを中心として180度回転した三角形ABCを描きます。

※ 辺BCと辺ACはどちらも180度回転しています。



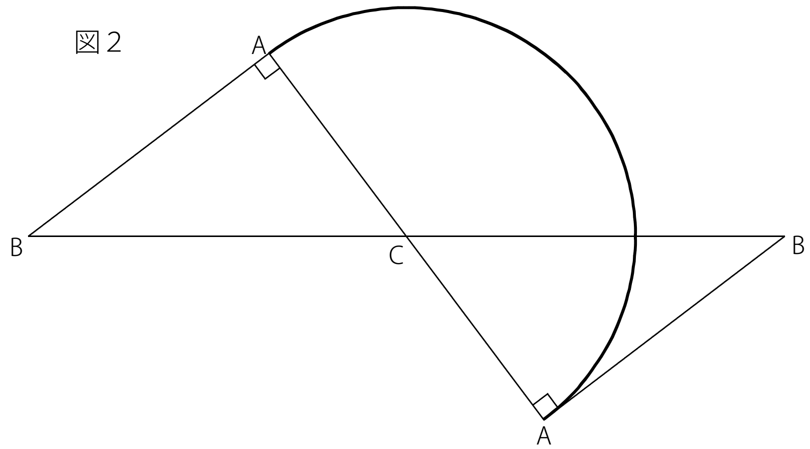
例題と解説

次に直線AB上でCに最も近い点を90度回転させたときの円弧を描きます。

※ 直線CAは直線ABと垂直なので、直線AB上でCに最も近い点は点Cです。

よって右図２のようになします。

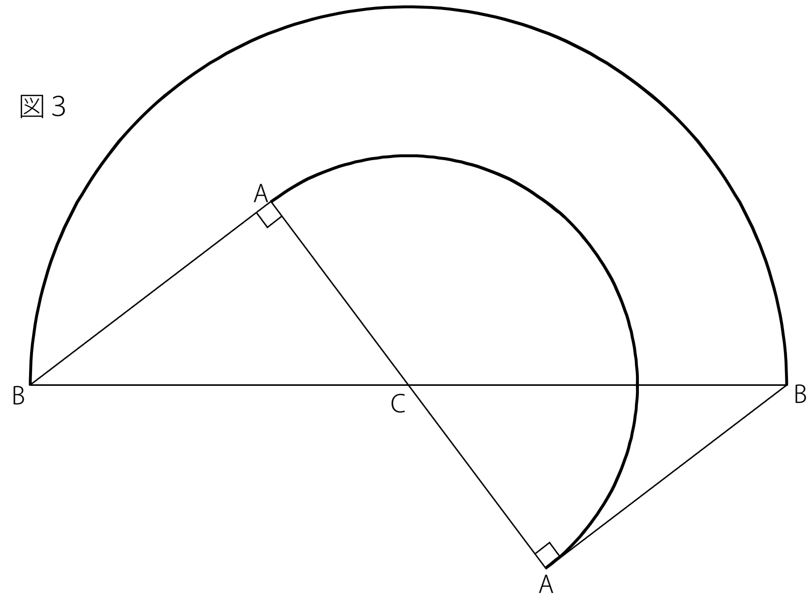
図２



次に直線AB上でCから最も遠い点を90度回転させたときの円弧を描きます。

このとき右図３のようになします。

図３



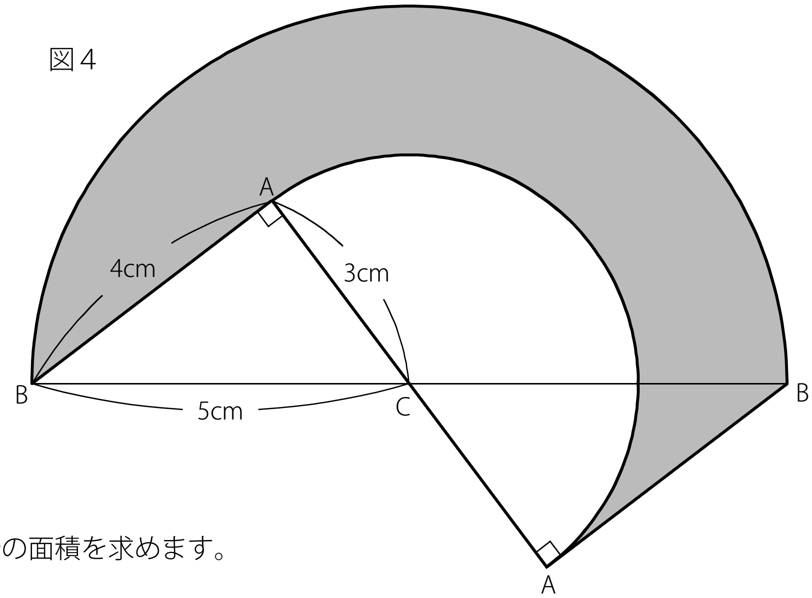
例題と解説

2つの円弧と辺ABで囲まれた部分をぬります。

この部分が辺ABが通る部分です。

右図４のようになります。

図４



全体の面積から白の部分の面積を引いて、色のついた部分の面積を求めます。

(全体の面積)＝(半径5cm ，中心角180度のおうぎ形)＋(直角三角形ABC)

$=5\times5\times3.14\times\frac{1}{2}+3\times4\div2=\frac{25}{2}\times3.14+6$

(白の部分の面積)＝(半径3cm ，中心角180度のおうぎ形)＋(直角三角形ABC)

$=3\times3\times3.14\times\frac{1}{2}+3\times4\div2=\frac{9}{2}\times3.14+6$

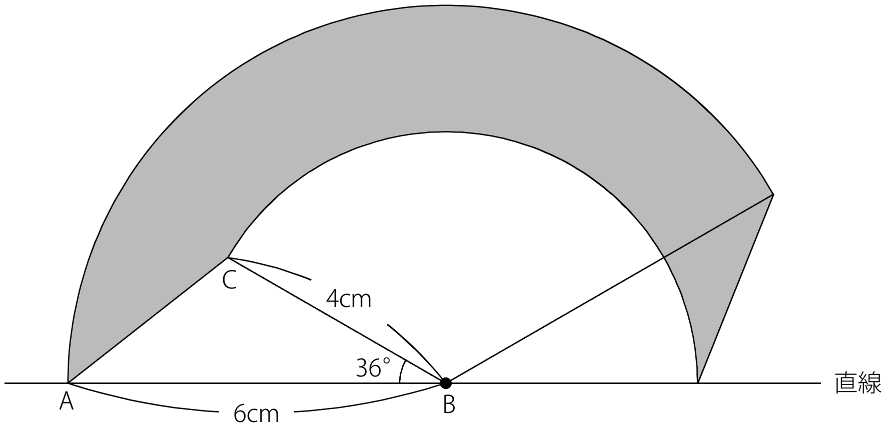
(色のついた部分の面積)$=\left(\frac{25}{2}\times3.14+6\right)-\left(\frac{9}{2}\times3.14+6\right)=\frac{16}{2}\times3.14=8\times3.14=25.12(\mathrm{cm}^2)$

※ 三角形ABCの面積が求められない場合でも、色のついた部分の面積を求めることができます。

例題と解説

例題３

下図のように三角形ABCを点Bを中心として、辺BCが直線と重なるまで回転させます。色のついた部分の面積は何cm^2ですか。ただし円周率は3.14とします。

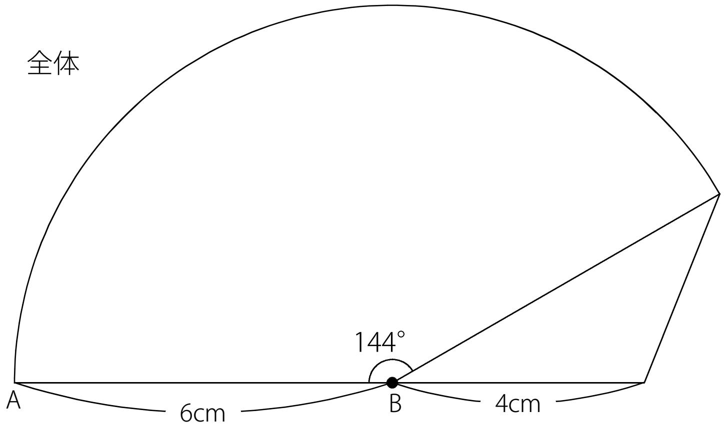


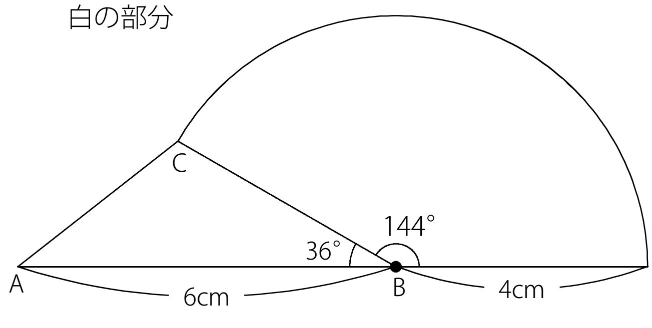
答え 25.12cm^2

[例題３の解説]

辺BCが直線と重なるまでなので 180－36＝144(度) 回転しています。

全体から白の部分の面積を引いて、色のついた部分の面積を求めます。





例題と解説

(全体の面積)

＝(半径6cm，中心角144度のおうぎ形)＋(三角形ABC)

(白の部分の面積)

＝(半径4cm，中心角144度のおうぎ形)＋(三角形ABC)

(色のついた部分の面積)

＝{(半径6cm，中心角144度のおうぎ形)＋(三角形ABC)}－{(半径4cm，中心角144度のおうぎ形)＋(三角形ABC)}

＝(半径6cm，中心角144度のおうぎ形)－(半径4cm，中心角144度のおうぎ形)

$= 6 \times 6 \times 3.14 \times \frac{144}{360} - 4 \times 4 \times 3.14 \times \frac{144}{360}$

$= 20 \times 3.14 \times \frac{2}{5}$

$= 8 \times 3.14$

$= 25.12(\mathrm{cm}^2)$

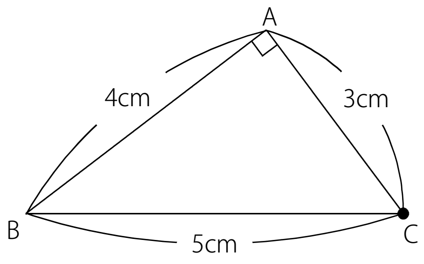
※ 三角形ABCの面積を求めることはできませんが、三角形ABCは引き算で打ち消し合うので、求める必要はありません。

中学受験Unit.38- 1　5年　図形の回転移動２
回転と辺の軌跡

例題と解説

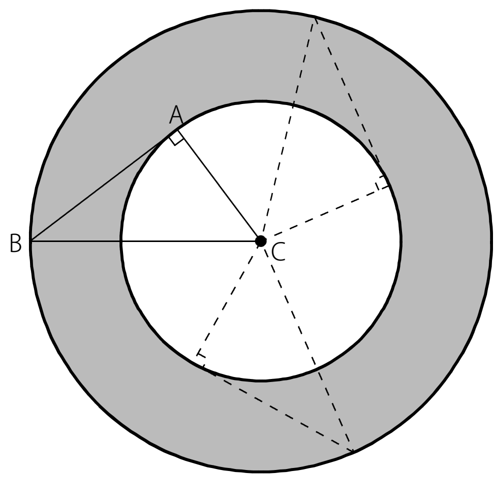
例題４

下図のような直角三角形ABCを点Cを中心に360度回転させます。このとき辺ABが通る部分を色をつけて表しなさい。
またその部分の面積は何cm²ですか。ただし円周率は3.14とします。



答え　50.24cm²

[例題４の解説]
360度回転させたとき、辺ABの通る部分は、回転の中心Cから最も近い点Aが作る円と回転の中心Cから最も遠い点Bが作る円に囲まれた部分なので右図のようなドーナツ型になります。

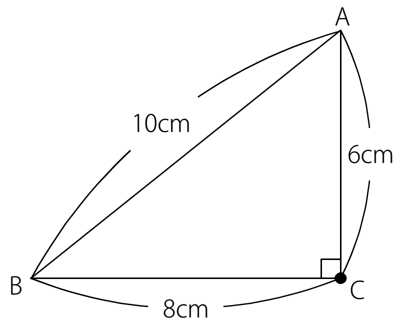


(辺ABが通る部分の面積)
＝5×5×3.14－3×3×3.14
＝16×3.14
＝50.24(cm²)

例題と解説

例題５

下図のような直角三角形ABCを点Cを中心に360度回転させます。このとき辺ABが通る部分を色をつけて表しなさい。またその部分の面積は何cm^{2}ですか。ただし円周率は3.14とします。

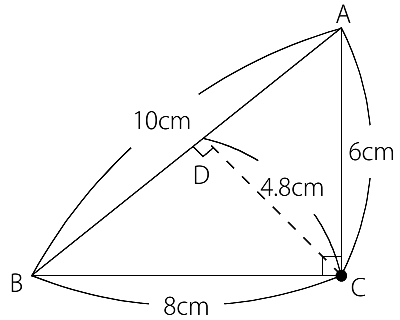


答え 128.6144cm^2

[例題５の解説]

360度回転させたとき、辺ABの通る部分は、回転の中心Cから最も近い点が作る円と回転の中心Cから最も遠い点が作る円に囲まれた部分なのでドーナツ型になります。

点Cから最も遠い点は点Bです。点Cから最も近い点は、右図のように点Cから辺ABに引いた垂線と辺ABが交わる点です。この点を点Dとします。

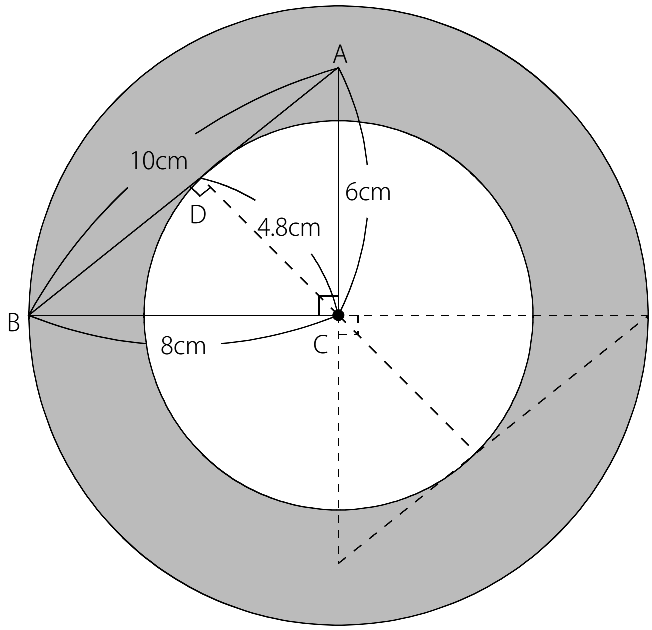


(三角形ABCの面積)＝8×6÷2＝24(cm^2)

底辺をABとして考えるとCDが高さなので CD＝24×2÷10＝4.8(cm) です。

例題と解説

辺ABが通る部分は右図のように点Bが作る円と点Dが作る円で囲まれたドーナツ型の部分です。



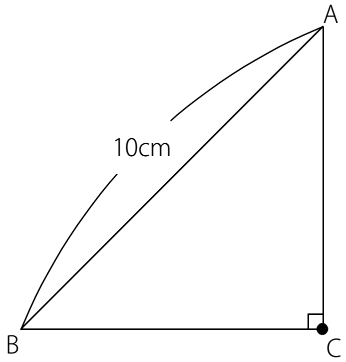
(辺ABが通る部分の面積)
＝8×8×3.14－4.8×4.8×3.14
＝(64－23.04)×3.14
＝40.96×3.14
＝128.6144(cm^2)

※ 回転の中心Cから最も近い点は点Aではありません。
注意しましょう。

例題と解説

例題６

下図のような直角二等辺三角形ABCを点Cを中心に360度回転させます。このとき辺ABが通る部分を色をつけて表しなさい。またその部分の面積は何cm²ですか。ただし円周率は3.14とします。

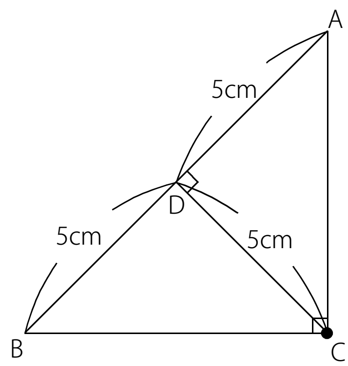


答え 78.5cm²

[例題６の解説]

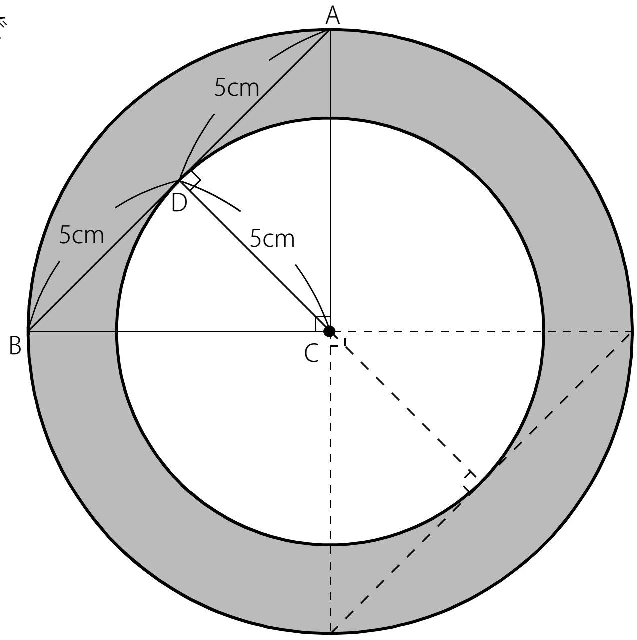
360度回転させたとき、辺ABの通る部分は、回転の中心Cから最も近い点が作る円と回転の中心Cから最も遠い点が作る円に囲まれた部分なのでドーナツ型になります。

点Cから最も遠い点は点A(または点B)です。三角形ABCは二等辺三角形なので、右図のように点Cから最も近い点は、点Cから辺ABに引いた垂線と辺ABが交わる点です。
この点を点Dとします。CD＝5(cm) です。



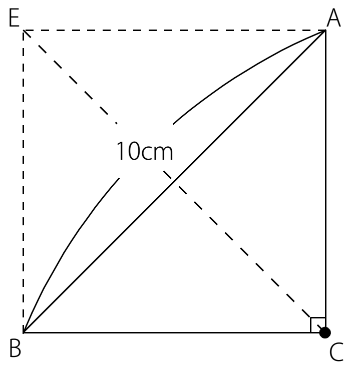
例題と解説

辺ABが通る部分は右図のように点A(または点B)が作る円と点Dが作る円で囲まれたドーナツ型の部分です。



(辺ABが通る部分の面積)
＝AC×AC×3.14ー5×5×3.14

ここで下図のような正方形EBCAを考えます。
(対角線の長さ)＝10(cm) なので正方形EBCAをひし形と考えて
(正方形EBCAの面積)＝10×10÷2＝50(cm²)



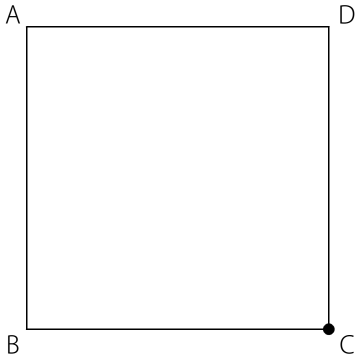
よって AC×AC＝50 であることがわかります。
※ 算数ではACの長さを求めることはできません。√ (ルート)になります。

(辺ABが通る部分の面積)
＝AC×AC×3.14ー5×5×3.14
＝50×3.14ー25×3.14
＝25×3.14
＝78.5(cm²)

例題と解説

例題７

下図のような1辺6cmの正方形ABCDを点Cを中心に90度回転させます。このとき対角線BDが通る部分を色をつけて表しなさい。またその部分の面積は何cm²ですか。ただし円周率は3.14とします。

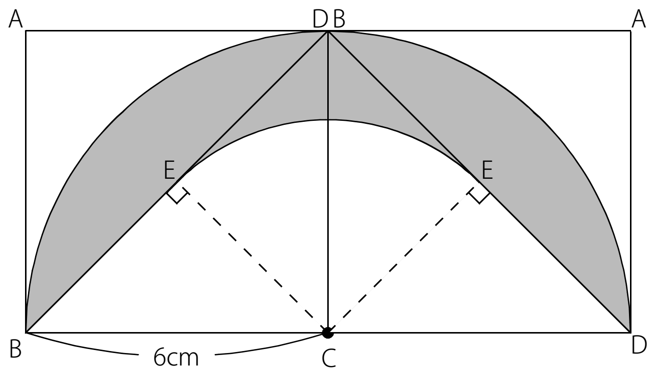


答え 24.39cm²

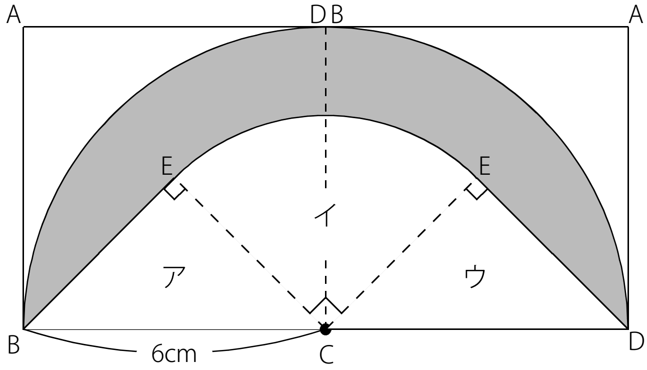
[例題７の解説]

対角線BDの中点をEとします。

90度回転させたとき、対角線BDの通る部分は、回転の中心Cから最も遠い点Bと点Dが作る円と回転の中心Cから最も近い点Eが作る円と対角線に囲まれた部分なので下図のようになります。



例題と解説

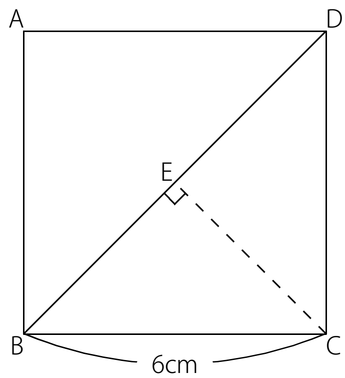


(対角線BDが通る部分の面積)

＝(半径6cmの半円)ー(ア＋イ＋ウ)

アとウはそれぞれ正方形ABCDの$\frac{1}{4}$なので

アＡ＝ウ＝$6\times6\times\frac{1}{4}$＝9(cm^2)



イ＝CE×CE×3.14×$\frac{1}{4}$

正方形ABCDの面積は 6×6＝36(cm^2) なので対角線をCAとすると CA×CA÷2＝36

よって CA×CA＝72

CA＝CE×2 より CA×CA＝(CE×2)×(CE×2)＝CE×CE×4＝72

よって CE×CE＝18 なので イ＝CE×CE×3.14×$\frac{1}{4}$＝18×3.14×$\frac{1}{4}$＝4.5×3.14

(対角線BDが通る部分の面積)

＝(半径6cmの半円)ー(ア＋イ＋ウ)

＝6×6×3.14÷2ー(9＋4.5×3.14＋9)

＝18×3.14ー4.5×3.14ー18

＝13.5×3.14ー18

＝42.39ー18

＝24.39(cm^2)

例題と解説

ポイントまとめ

・辺が通る部分の面積の基本的な求め方は (全体)ー(白の部分)

・回転の中心から最も遠い点と最も近い点を見定めましょう。

・半径が求められない場合でも 半径×半径 であれば求められる場合があります。
　この場合は正方形の面積に着目して 直径×直径＝半径×2×半径×2＝半径×半径×4 という関係を利用しましょう。