中学受験Unit.33- 2　5年　点の移動2
点の移動と周期性

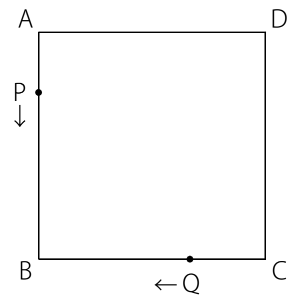
例題と解説

例題1

右図のように1辺30cmの正方形ABCDがあります。点PはAを出発して矢印の方向に秒速2cmで正方形の辺上を回り続けます。点Qは点Pと同時にCを出発して矢印の方向に秒速3cmで正方形の辺上を回り続けます。このとき次の問いに答えなさい。

（1）　点Pと点Qが初めて同時にそれぞれの出発点にもどるのは出発してから何秒後ですか。

（2）　点Pと点Qが4度目にAで出会うのは出発してから何秒後ですか。



答え（1）120秒後（2）420秒後

[例題１の解説]

（1）　(正方形の周りの長さ)＝30×4＝120(cm) なので
(点Pが1周するのにかかる時間)＝120÷2＝60(秒)，(点Qが1周するのにかかる時間)＝120÷3＝40(秒)
点Pは60秒ごとにAに、点Qは40秒ごとにCにもどってくるので、初めて同時にもどってくるのは
60と40の最小公倍数の120秒後となります。

（2）　点PはAから出発して、60秒ごとにAにもどってきます。
C→B→A の長さが 30×2＝60(cm) なので、点Qが初めてAに来るのは出発してから 60÷3＝20(秒後)
点Qは1周するのに40秒かかるので、20秒後以降は40秒ごとに点QがAに来ることになります。
点PがAに来る時間(秒後)　0，**60**，120，**180**，240，**300**，360，…
点QがAに来る時間(秒後)　20，**60**，100，140，**180**，220，260，**300**，…
よって点Pと点Qが初めてAで出会うのは出発してから60秒後であることがわかります。
60秒後以降は60と40の最小公倍数の120秒後ごとにAで出会います。
※ 120秒間で点Pは2周してAに、点Qは3周してAにもどってくるので120秒ごとにAで出会います。
(1回目)＝60(秒後)，(2回目)＝180(秒後)，(3回目)＝300(秒後)，(4回目)＝420(秒後)，…
点Pと点Qが4度目にAで出会うのは出発してから420秒後であることがわかります。

※ 書き上げて1回目を求め、その後は最小公倍数の周期性を利用して求めるという考え方に慣れましょう。

中学受験Unit.33- 2　5年　点の移動２
点の移動と周期性

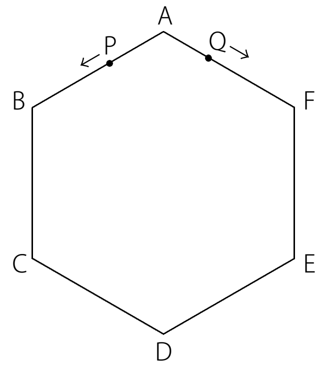
例題と解説

例題２

右図のように正六角形ABCDEFがあり、Aから点Pと点Qが同時に出発して矢印の方向に正六角形の辺上を回り続けます。点Pと点Qは正六角形を1周するのにそれぞれ12秒, 15秒かかります。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　点Pと点Qが初めて出会うのは出発してから何秒後ですか。

（２）　点Pと点Qが5度目にCで出会うのは出発してから何秒後ですか。



答え（１）$6\frac{2}{3}$秒後（２）280秒後

[例題２の解説]

（１）　計算しやすくするために正六角形の周りの長さを12と15の最小公倍数の60cmとします。

このとき (点Pの速さ)＝60÷12＝(秒速)5(cm)，(点Qの速さ)＝60÷15＝(秒速)4(cm)

2点がAから出発して合わせて60cm進めば出会うので60÷(5＋4)＝$6\frac{2}{3}$(秒後) に点Pと点Qは初めて出会います。

（２）　(正六角形の周りの長さ)＝60(cm) とすると (1辺の長さ)＝60÷6＝10(cm)

点Pが初めてCに来るのは 10×2÷5＝4(秒後) で、その後は12秒ごとにCに来ます。

点Qが初めてCに来るのは 10×4÷4＝10(秒後) で、その後は15秒ごとにCに来ます。

点PがCに来る時間(秒後)　4，16，28，**40**，52，…

点QがCに来る時間(秒後)　10，25，**40**，55，70，…

よって点Pと点Qが初めてCで出会うのは出発してから40秒後であることがわかります。

40秒後以降は12と15の最小公倍数の60秒後ごとにCで出会います。

5度目にCで出会うのは初めてCで出会うときの 60×(5－1)＝240(秒後) なので

点Pと点Qが5度目にCで出会うのは出発してから 40＋240＝280(秒後) であることがわかります。

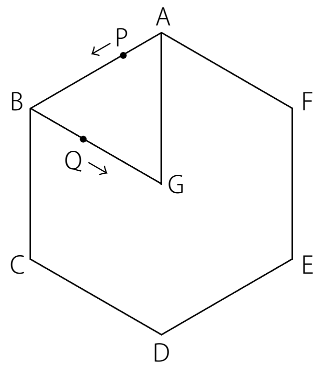
例題と解説

例題３

右図のように1辺12cmの正六角形ABCDEFと正三角形ABGがあります。点PはAを出発して秒速8cmで矢印の方向に正六角形の辺上を回り続けます。点Qは点Pと同時にBを出発して秒速6cmで矢印の方向に正三角形の辺上を回り続けます。
このとき次の問いに答えなさい。

（１）　点Pと点Qが同時にAに来ることはありません。その理由を説明しなさい。

（２）　点Pと点Qを結ぶ直線の長さが2度目に24cmになるのは出発してから何秒後ですか。



答え（１）省略（２）24秒後

[例題３の解説]

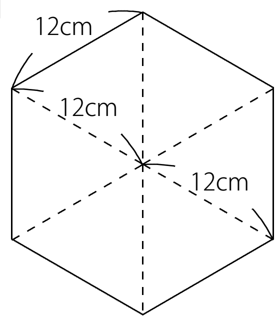
（１）　1辺12cmなので (正六角形の周りの長さ)＝12×6＝72(cm)，(正三角形の周りの長さ)＝12×3＝36(cm)
点Pは0秒から 72÷8＝9(秒) ごとにAに来ます。
点Qが初めてAに来るのは 12×2÷6＝4(秒後) で、その後は 36÷6＝6(秒) ごとにAに来ます。
点PがAに来る時間(秒後)　0，9，18，27，36，45，54，63，72，81，90，…
点QがAに来る時間(秒後)　4，10，16，22，28，34，40，46，52，58，64，…
式で整理すると
(点PがAに来る時間)＝(9の倍数)
9の倍数は3の倍数なので (点PがAに来る時間)＝(3の倍数) と表すことができます。
(点QがAに来る時間)＝4＋(6の倍数)
6の倍数は3の倍数なので (点QがAに来る時間)＝4＋(3の倍数)
4＝1＋3 なので (点QがAに来る時間)＝1＋3＋(3の倍数)
3は3の倍数なのでまとめて (点QがAに来る時間)＝1＋(3の倍数) と表すことができます。

理由を整理すると
「点PがAに来るのは　(3の倍数)秒後，点QがAに来るのは (3の倍数)秒後 ではないので同時にAに来ることはない」
ということになります。

例題と解説

（２）　右図１のように１辺12cmの正六角形の中心を通る対角線の長さは 12×2＝24(cm) です。

図１



点Pと点Qを結ぶ直線の長さが24cmになるのは
下図２のように点PがD，点QがAに来る場合
下図３のように点PがE，点QがBに来る場合 の２つの場合が考えられます。

図２

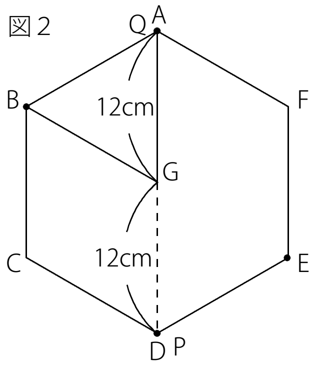


図３

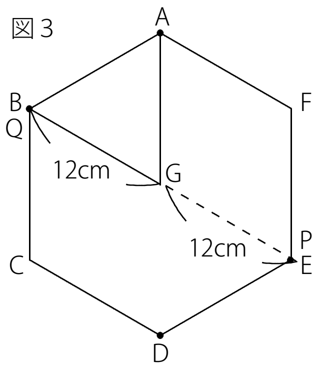


図２の場合
点PがDに来る時間(秒後)　4.5，13.5，22.5，31.5，40.5，49.5，58.5，…
点QがAに来る時間(秒後)　4，10，16，22，28，34，40，…
点PがD，点QがAに同時に来ることはありません。

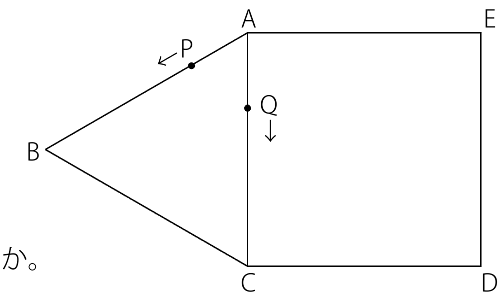
図３の場合
点PがEに来る時間(秒後)　**6**，15，**24**，33，**42**，51，60，…
点QがBに来る時間(秒後)　0，**6**，12，18，**24**，30，36，**42**，…
点PがE，点QがBに同時に来るのは 6秒後，24秒後，42秒後，… です。

よって点Pと点Qを結ぶ直線の長さが2度目に24cmになるのは出発してから24秒後であることがわかります。

例題と解説

例題４

右図のように1辺36cmの正三角形ABCと正方形ACDEがあります。点PはAを出発して秒速2cmで矢印の方向に正三角形の辺上を回り続けます。点Qは点Pと同時にA出発して秒速6cmで矢印の方向に正方形の辺上を回り続けます。このとき次の問いに答えなさい。



（１）　点Pと点Qが初めて同時にCに来るのは出発してから何秒後ですか。

（２）　出発してから20分間で点Pと点Qが同じ頂点に来るのは何回ありますか。
ただし最初にAから出発するときも1回として数えるものとします。

答え（１）198秒後（２）11回

[例題４の解説]

（１）　(正三角形ABCの周りの長さ)＝36×3＝108(cm)，(正方形ACDEの周りの長さ)＝36×4＝144(cm)
点Pが初めてCに来るのは 36×2÷2＝36(秒後) で、その後は 108÷2＝54(秒) ごとにCに来ます。
点Qが初めてCに来るのは 36÷6＝6(秒後) で、その後は 144÷6＝24(秒) ごとにCに来ます。
点PがCに来る時間(秒後)　36，90，144，**198**，252，306，360，…
点QがCに来る時間(秒後)　6，30，54，78，102，126，150，174，**198**，222，246，…
よって点Pと点Qが初めて同時にCに来るのは出発してから198秒後であることがわかります。

（２）　点Pと点Qが同じ頂点に来るとき、考えられる頂点はAとCです。
点Pは0秒から 108÷2＝54(秒) ごとにAに来ます。点Qは0秒から 144÷6＝24(秒) ごとにAに来ます。
0秒のときに2点はAにいるので、0秒から54と24の最小公倍数の216秒ごとに同時にAに来ます。
20分は 60×20＝1200(秒) なのでその間に同時にAに来るのは 1200÷216＝5(回)あまり120
最初の0秒のときの1回も加えて**同時にAに来るのは 5＋1＝6(回)**
また(1)より同時にCに来るのは198秒後から216秒ごとなので (1200－198)÷216＝4(回)あまり138
198秒後の1回も加えて**同時にCに来るのは 4＋1＝5(回)**

よって出発してから20分間で点Pと点Qが同じ頂点に来るのは全部で 6＋5＝11(回)

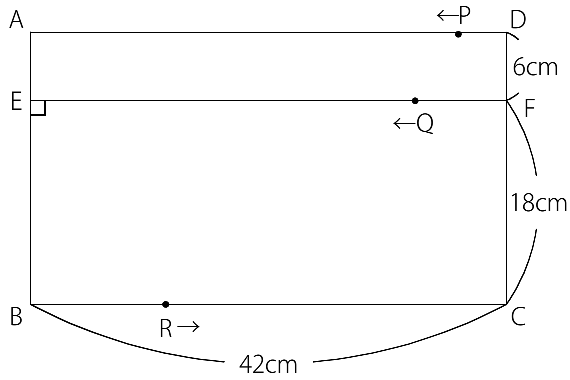
例題と解説

例題５

右図のように長方形ABCDがあります。点PはDを出発してAD上を、点QはFを出発してEF上を、点RはBを出発してBC上を往復し続けます。3点 P，Q，R は同時に出発し、それぞれ秒速1cm，秒速2cm, 秒速3cmで進みます。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　出発してから10分間に直線PRが辺ABと平行になるのは何回ありますか。

（２）　3点 P，Q，R が初めて一直線上に並ぶのは出発してから何秒後ですか。



答え（１）43回（２）5.25秒後

[例題５の解説]

（１）　点Pと点Rを結んだ直線PRが辺ABと平行になるのは、下図１や下図２のような場合です。
点Pと点Rが42cmの直線上を往復していると考えた場合に、点Pと点Rが出会ったり、点Rが点Pに追いついて同じ場所に来たときに、直線PRが辺ABと平行になります。

図１

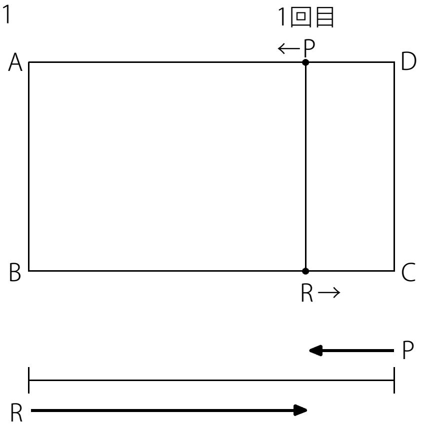
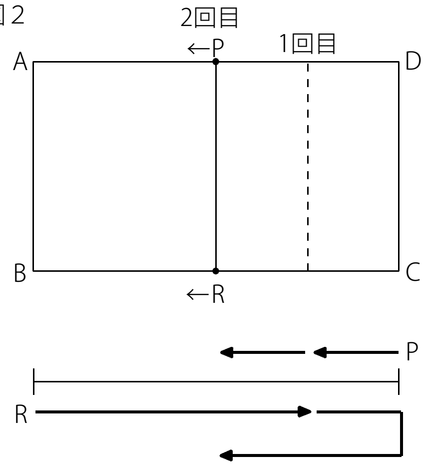


図２



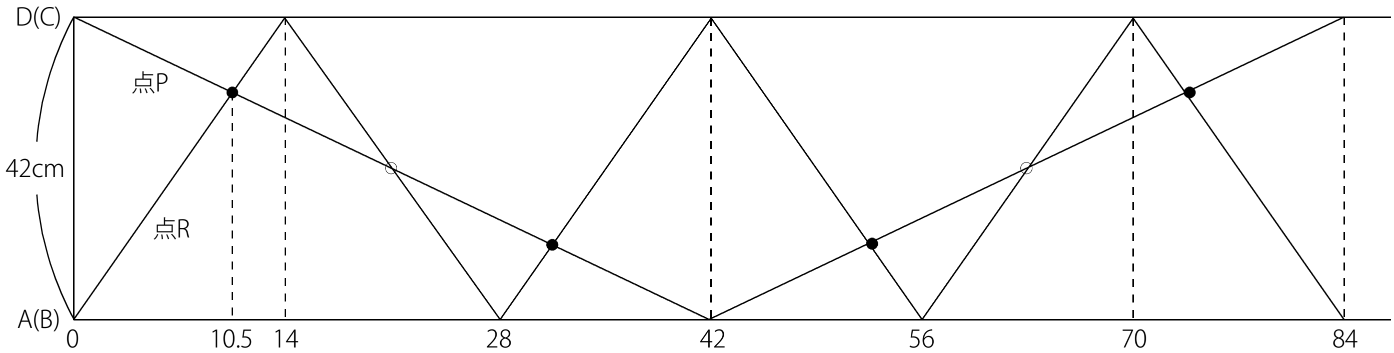
ダイヤグラムを用いて考えます。

例題と解説

点Pは 42×2÷1＝84(秒) でDに、点Rは 42×2÷3＝28(秒) でAにもどってきます。

84と28の最小公倍数は84なので84秒ごとに点Pと点Rは最初の状態にもどるので出発後84秒間を考えます。

図３



点Pと点Rが出会うのが4回、点Rが点Pに追いつくのが2回あるので、同じ場所に来るのは 4＋2＝6(回)

つまり直線PRと辺ABは84秒間で6回平行になります。

10分は600秒なので 600÷84＝7(周期)あまり12(秒)

7周期で 6×7＝42(回) 平行になります。

1周期の1回目は 42÷(1＋3)＝10.5(秒) のときなので、あまりの12秒で1回平行になります。

よって全部で 42＋1＝43(回) 平行になります。

※ ダイヤグラムは84秒を1周期として、その後は同様にくり返しになります。

42秒で点PがAに、点RがDに来るのでダイヤグラムも左右対称になっていることがわかります。

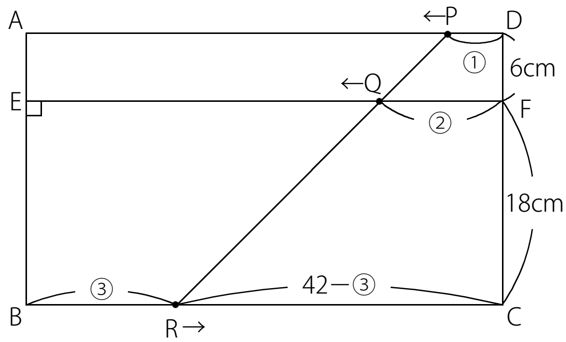
※ 速さの問題ではダイヤグラムと周期性に着目して複雑な計算を省くことができる場合があります。

※ この問題では関係ありませんがダイヤグラムから「出会い」と「追いつき」をきちんと区別して
考えられるようにしておきましょう。

例題と解説

（２）　3点 P，Q，R の進む速さの比は 1：2：3 なので
初めて一直線上に並ぶまでに進む長さを ①, ②, ③
とすると右図１のようになります。

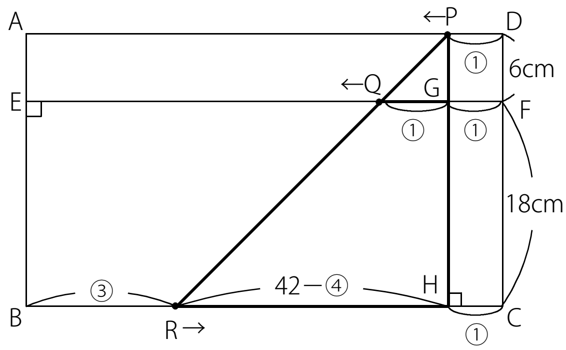
図１



ここで右図２のように点Pを通るDCに平行な直線PHを
引きます。このとき三角形PQGと三角形PRHは相似です。
相似比は 6：(6＋18)＝1：4

QG：RH＝1：4 なので ①：(42－④)＝1：4
よって (42－④)×1＝①×4 より 42－④＝④
⑧＝42 なので ①＝5.25(cm)

図２

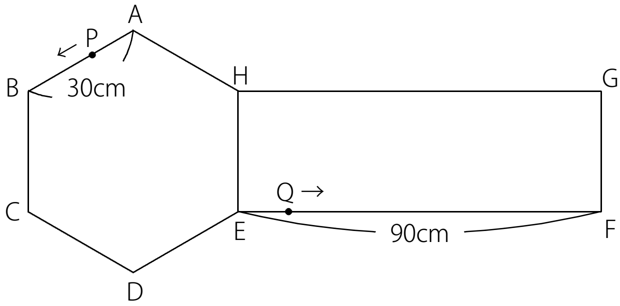


点Pが進んだ長さは ①＝5.25(cm) で秒速1cmで進むので
3点 P，Q，R が初めて一直線上に並ぶのは出発してから 5.25÷1＝5.25(秒後)

例題と解説

例題６

右図のように正六角形ABCDEHと長方形EFGHがあります。
点PはAを出発して秒速2cmで矢印の方向に正六角形の辺上を回り続けます。点Qは点Pと同時にEを出発して秒速3cmで矢印の方向に長方形の辺上を回り続けます。
このとき次の問いに答えなさい。



（１）　点Pと点Qが初めて出会うのは出発してから何秒後ですか。

（２）　点Pと点Qが20回目に出会うのは出発してから何分何秒後ですか。

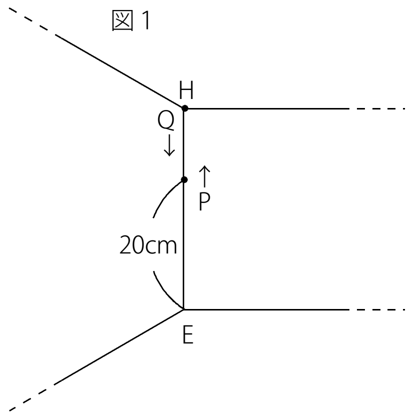
答え（１）72秒後（２）74分36秒後

[例題６の解説]

（１）　点Pと点Qは辺EH上で出会います。

点Pは秒速2cmなので初めてEに来るのは 30×4÷2＝60(秒後)

点Qは秒速3cmなので初めてHに来るのは (90＋30＋90)÷3＝70(秒後)



点Qが初めてHに来たとき点PはEから 2×(70－60)＝20(cm) 進んでいます。

このとき２つの点は 30－20＝10(cm) 離れています。

この後で２つの点は 10÷(2＋3)＝2(秒後) に出会います。

よって点Pと点Qが初めて出会うのは出発してから 70＋2＝72(秒後) であることがわかります。

（２）　(1)と同様に点Pと点Qが出会う前に点PはEを、点QはHを通ります。
点Pは出発してから60秒後にEに来て、その後は 30×6÷2＝90(秒) ごとにEに来ます。
点Qは出発してから70秒後にHに来て、その後は (30×2＋90×2)÷3＝80(秒) ごとにHに来ます。

点Pと点Qは90と80の最小公倍数の720秒ごとに同時にそれぞれ最初の頂点にもどるので
720秒を1周期として、その間に点PがEに点QがHに来る時間を整理すると次の表のようになります。

点PがEに来る時間(秒後)　 60 ，150 ，240 ，330 ，420 ，510 ，600 ，690
点QがHに来る時間(秒後)　70 ，150 ，230 ，310 ，390 ，470 ，550 ，630 ，710

点PはEに着いてから 30÷2＝15(秒) でHに来るので、**点PがEに着いてから15秒以内**に点QがHに来れば
２つの点は辺EH上で出会います。
さらに
点QはHに着いてから 30÷3＝10(秒) でEに来るので、**点QがHに着いてから10秒以内**に点PがEに来れば
２つの点は辺EH上で出会います。

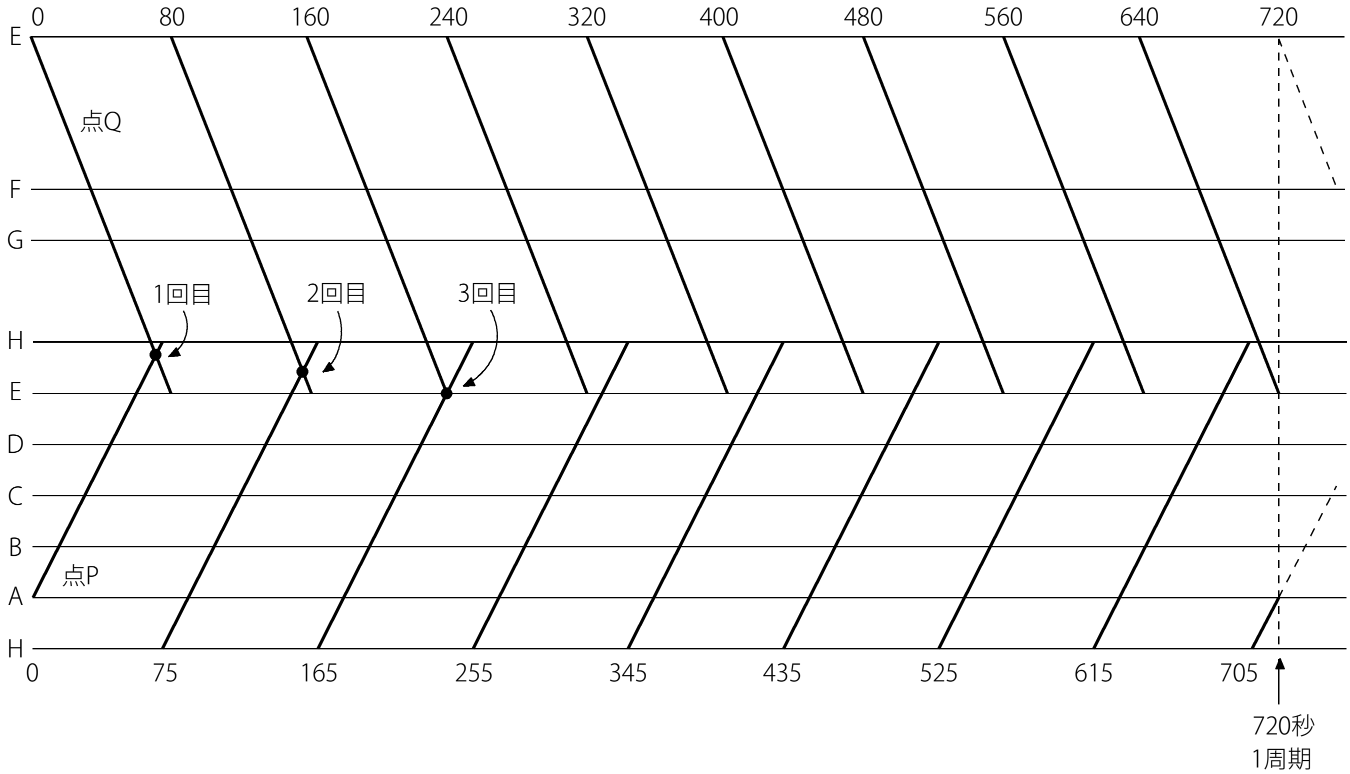
上の表でこの条件を満たすのは
(点PがEに来る時間 ，点QがHに来る時間)＝**(60 ，70) ，(150 ，150) ，(240 ，230) の3回**なので
1周期の720秒、つまり12分で3回出会うことがわかります。

求めたいのは20回目なので 20÷3＝6(周期)あまり2(回)
6周期は 12(分)×6＝72(分)
あまりが2回なので1周期の2回目に着目すると、150秒のときに点PはEに、点QはHに来ています。
このとき２つの点は30cm離れているので、その後 30÷(2＋3)＝6(秒後) に出会います。
よって点Pと点Qが20回目に出会うのは出発してから 72(分)＋150(秒)＋6(秒)＝74(分)36(秒後) となります。

※ 1周期の720秒間をダイヤグラムで整理すると次のようになります。

中学受験Unit.33- 2　5年　点の移動２
点の移動と周期性

例題と解説



※ 1周期をきちんと調べて周期性を利用しましょう。

ポイントまとめ

・書き上げて1回目を求め、その後は最小公倍数の周期性を利用して求めるという考え方に慣れましょう。
・速さの問題ではダイヤグラムと周期性に着目して複雑な計算を省くことができる場合があります。
・1周期をきちんと調べて周期性を利用しましょう。