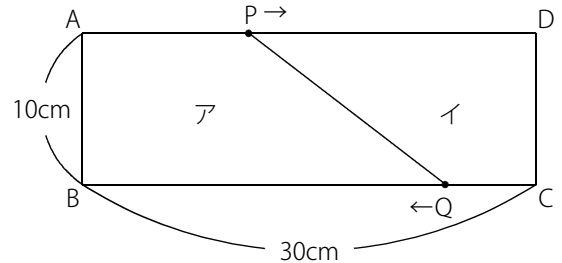




例題と解説

例題 1

右図のような長方形ABCDがあります。点PはAを出発して秒速2cmでDに向かいます。点Qは点Pと同時にCを出発して秒速3cmでBに向かいます。このとき直線PQで分けてできる2つの図形を図のようにア、イとします。このとき次の問いに答えなさい。



- (1) 出発してから3秒後のアとイの面積の比を求めなさい。
- (2) アとイの面積の比が 4 : 5 になるのは出発してから何秒後ですか。

答え (1) 9 : 11 (2) $3\frac{1}{3}$ 秒後

[例題 1 の解説]

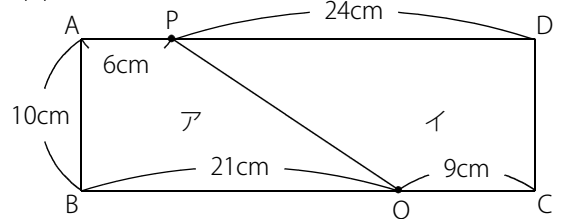
- (1) 出発してから3秒後は右図 1 のようになります。

$$(\text{アの面積}) = (6 + 21) \times 10 \div 2 = 135(\text{cm}^2)$$

$$(\text{イの面積}) = (24 + 9) \times 10 \div 2 = 165(\text{cm}^2)$$

$$\text{よって } (\text{アの面積}) : (\text{イの面積}) = 135 : 165 = 9 : 11$$

図 1



(別解)

アとイの台形は高さが等しいので $AB = 10(\text{cm})$ という情報が無くても求めることができます。

$$(\text{アの面積}) = (6 + 21) \times AB \div 2, (\text{イの面積}) = (24 + 9) \times AB \div 2$$

$$\text{よって } (\text{アの面積}) : (\text{イの面積}) = (6 + 21) \times AB \div 2 : (24 + 9) \times AB \div 2 = 27 : 33 = 9 : 11$$

- (2) (長方形ABCDの面積) $= 10 \times 30 = 300(\text{cm}^2)$ なのでアとイの面積の比が 4 : 5 になるとき

$$(\text{アの面積}) = 300 \times \frac{4}{4+5} = \frac{400}{3}(\text{cm}^2), (\text{イの面積}) = 300 - \frac{400}{3} = \frac{500}{3}(\text{cm}^2) \text{ となります。}$$

アの面積が $\frac{400}{3}\text{cm}^2$ になればイの面積は $\frac{500}{3}\text{cm}^2$ と決まるので、アの面積が $\frac{400}{3}\text{cm}^2$ になるときを求めます。



例題と解説

1秒進むごとに台形アの上底の長さは2cmずつ長くなり、下底は3cmずつ短くなります。

よって1秒進むと (上底)+(下底) は1cm短くなり、台形アの面積は $1 \times 10 \div 2 = 5(\text{cm}^2)$ ずつ小さくなります。

(最初のアの面積) $= 30 \times 10 \div 2 = 150(\text{cm}^2)$

アの面積が $\frac{400}{3}\text{cm}^2$ になるには $150 - \frac{400}{3} = \frac{50}{3}(\text{cm}^2)$ 小さくなればいので

$\frac{50}{3} \div 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}(\text{秒})$ よりアとイの面積比が 4 : 5 になるのは出発してから $3\frac{1}{3}$ 秒後であることがわかります。

(別解1)

点Pは秒速2cm , 点Qは秒速3cmで進むので、同じ時間に進む距離の比は 2 : 3 です。

ここで (アの面積) $= \frac{400}{3}(\text{cm}^2)$ になるとき (Pが進んだ距離) $= \textcircled{2}$, (Qが進んだ距離) $= \textcircled{3}$ とします。

このとき右図2のようになります。

(アの面積) $= \{\textcircled{2} + (30 - \textcircled{3})\} \times 10 \div 2 = (30 - \textcircled{1}) \times 10 \div 2$

(イの面積) $= \{(30 - \textcircled{2}) + \textcircled{3}\} \times 10 \div 2 = (30 + \textcircled{1}) \times 10 \div 2$

(アの面積) : (イの面積) $= (30 - \textcircled{1}) : (30 + \textcircled{1})$

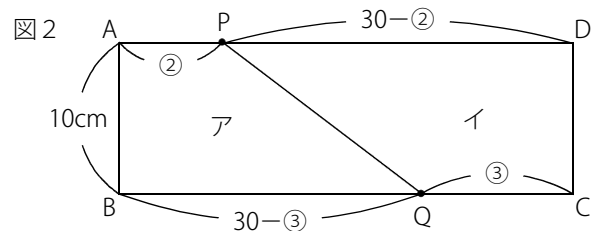
$(30 - \textcircled{1}) : (30 + \textcircled{1}) = 4 : 5$ なので (内項の積) $=$ (外項の積) より

$(30 + \textcircled{1}) \times 4 = (30 - \textcircled{1}) \times 5$

$120 + \textcircled{4} = 150 - \textcircled{5}$ より $\textcircled{9} = 30$ なので $\textcircled{1} = \frac{10}{3}(\text{cm})$, $\textcircled{2} = \frac{10}{3} \times 2 = \frac{20}{3}(\text{cm})$

点Pは秒速2cmなので $\frac{20}{3}\text{cm}$ 進むのにかかる時間は $\frac{20}{3} \div 2 = 3\frac{1}{3}(\text{秒})$

よってアとイの面積比が 4 : 5 になるのは出発してから $3\frac{1}{3}$ 秒後であることがわかります。



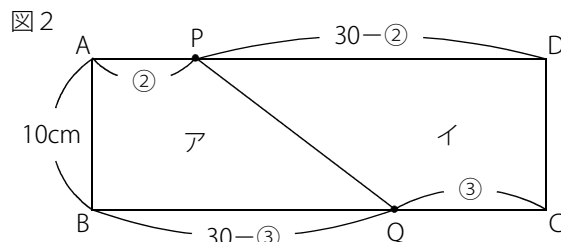


例題と解説

(別解2)

図2で

$$(\text{アの面積}) = \{② + (30 - ③)\} \times 10 \div 2 = (30 - ①) \times 10 \div 2 = 150 - ⑤$$



$$150 - ⑤ = \frac{400}{3} (\text{cm}^2) \text{ となるので } ⑤ = \frac{50}{3} \text{ より } ① = \frac{10}{3} \text{ よって } ② = \frac{10}{3} \times 2 = \frac{20}{3} (\text{cm})$$

点Pは秒速2cmなので $\frac{20}{3}$ cm進むのにかかる時間は $\frac{20}{3} \div 2 = 3\frac{1}{3}$ (秒)

よってアとイの面積比が 4 : 5 になるのは出発してから $3\frac{1}{3}$ 秒後であることがわかります。

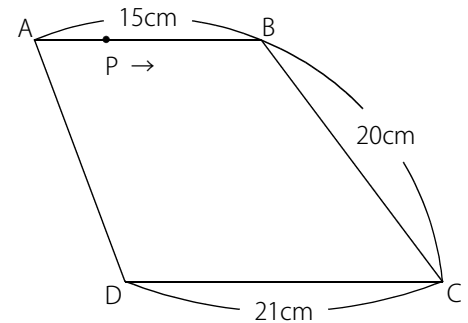


例題と解説

例題2

右図のように辺ABと辺CDが平行な台形があります。この台形の頂点Aから点Pが秒速2cmで A, B, C, D の順に進みます。

- (1) 点PがCD上にあり、三角形ADPの面積が台形ABCDの面積の半分になるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 点PがBC上にあり、三角形ADPの面積が台形ABCDの面積の半分になるのは出発してから何秒後ですか。

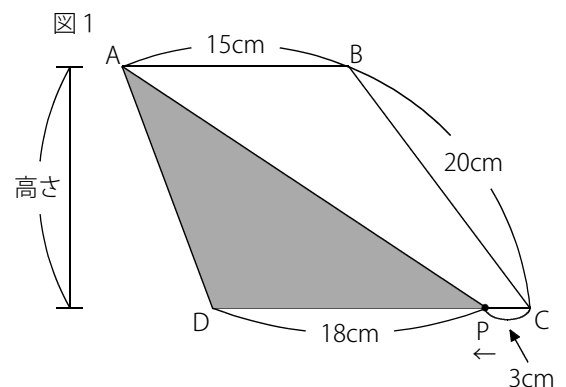


答え (1) 19秒後 (2) 12.5秒後

[例題2の解説]

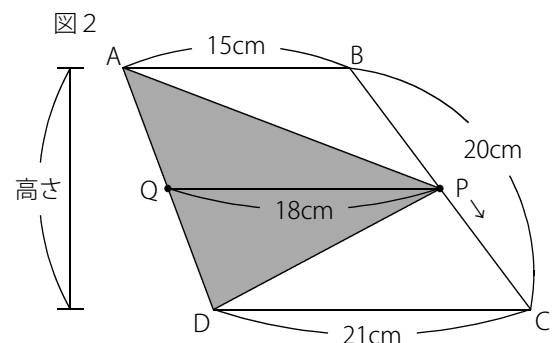
- (1) (台形ABCDの面積) = $(15 + 21) \times (\text{高さ}) \div 2 = 36 \times (\text{高さ}) \div 2$
三角形ADPの面積が台形ABCDの面積の半分になればいいので
(三角形ADPの面積) = $18 \times (\text{高さ}) \div 2$

つまり右図1のように DP = 18(cm) になるとき、三角形ADPの面積は台形ABCDの面積の半分になります。
このとき点Pは $15 + 20 + 3 = 38(\text{cm})$ 進んでいるので
出発してから $38 \div 2 = 19(\text{秒後})$ であることがわかります。



- (2) 右図2のように点Pを通るABと平行な直線がADと交わる点をQとします。

PQを底辺とすると (三角形ADPの面積) = $PQ \times (\text{高さ}) \div 2$ なので
 $PQ = 18(\text{cm})$ のとき、三角形ADPの面積は台形ABCDの面積の半分になります。





例題と解説

BPの長さを求めるために右図3のようにAを通って

BCに平行な直線を引きます。

三角形ADEと三角形AQFは相似で相似比は

$DE : QF = 6 : 3 = 2 : 1$ なので $AE : AF = 2 : 1$

$AF : FE = 1 : 1$ より $BP : PC = 1 : 1$

$BP = 20 \div 2 = 10(\text{cm})$

点Pは全部で $15 + 10 = 25(\text{cm})$ 進んでいるので

出発してから $25 \div 2 = 12.5(\text{秒後})$ であることがわかります。

※ 台形の場合は平行線を引いて三角形の相似に着目するという考え方に慣れておきましょう。

(別解)

台形では右図4のようなとき

(アとイの差) : (イとウの差) = $AE : EB = DF : FC$ が成り立ちます。

この考え方を利用すると右図5のとき

$BP : PC = (18 - 15) : (21 - 18) = 3 : 3 = 1 : 1$ であることがわかります。

よって $BP = 20 \div 2 = 10(\text{cm})$

点Pは全部で $15 + 10 = 25(\text{cm})$ 進んでいるので

出発してから $25 \div 2 = 12.5(\text{秒後})$ であることがわかります。

図3

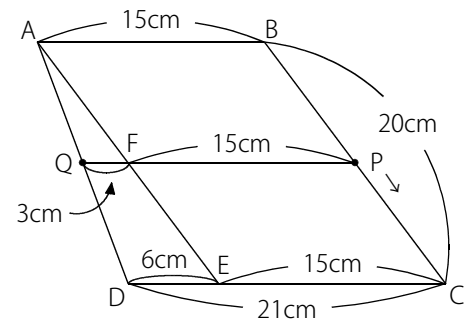


図4

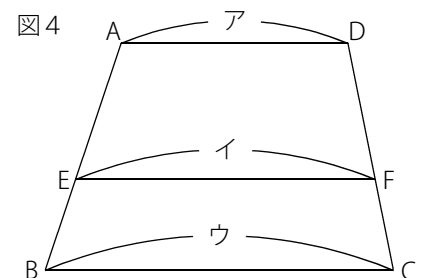
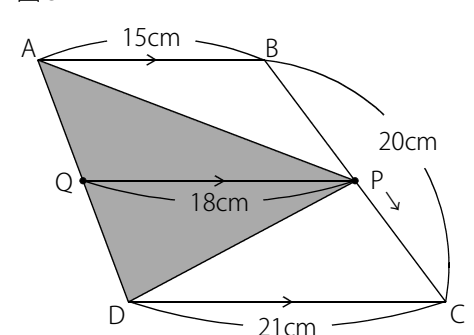


図5



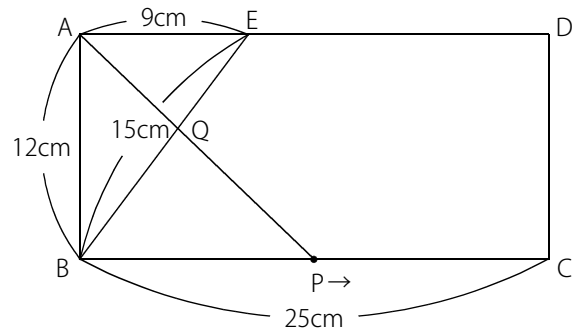


例題と解説

例題3

右図のような長方形ABCDがあります。点PはBを出発して秒速2cmでCに向かいます。APとBEの交点をQとするととき次の問いに答えなさい。

- (1) AQとBQの長さが等しくなるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 出発してから8秒後のPQの長さは何cmですか。
- (3) 出発してから8秒後のPDの長さは何cmですか。



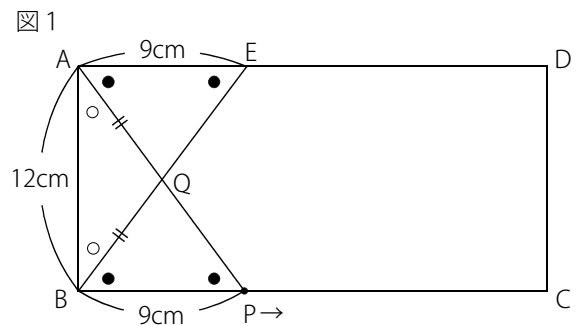
答え (1) 4.5秒後 (2) 12.8cm (3) 15cm

[例題3の解説]

- (1) AQとBQの長さが等しくなるとき三角形ABQは二等辺三角形になっています。

角QAB = $\circ$, 角QAE = $90 - \circ = \bullet$ とすると

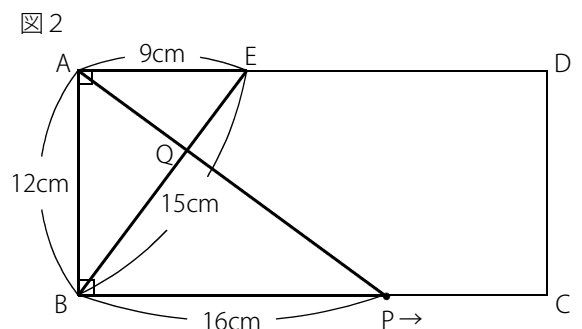
ADとBCは平行で錯角が等しいので 角QPB = $\bullet$ となり
角度はそれぞれ右図1のようになります。



三角形AEQと三角形PBQは合同なので $PB = AE = 9(\text{cm})$

点Pは秒速2cmなのでAQとBQの長さが等しくなるのは出発してから $9 \div 2 = 4.5(\text{秒後})$ であることがわかります。

- (2) 三角形ABEは3辺の長さの比が $9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5$ で
直角をはさむ2辺の長さの比が $3 : 4$ の直角三角形です。
点Pは出発してから8秒で $2 \times 8 = 16(\text{cm})$ 進みます。
このとき直角三角形BPAは直角をはさむ2辺の長さの比が
 $12 : 16 = 3 : 4$ なので三角形ABEと三角形BPAは相似です。





例題と解説

三角形ABEと三角形BPAは相似で

三角形ABEは3辺の長さの比が 3 : 4 : 5 なので

三角形BPAの3辺の長さの比も 3 : 4 : 5

よって右図3のように $PA = 12 \times \frac{5}{3} = 20(\text{cm})$

また三角形AEQと三角形PBQは相似で相似比は $AE : PB = 9 : 16$

よって $AQ : PQ = 9 : 16$ なので $PQ = 20 \times \frac{16}{9+16} = 12.8(\text{cm})$

※ 角ABE=●, 角PBQ=90-●=○ とすると
錯角が等しいことから角度はそれぞれ右図4
のようになります。

このとき三角形ABE, BPA, QAE, QPBはすべて
相似であることがわかります。

- (3) 三角形ABEは直角をはさむ2辺の長さが9cmと12cmです。
三角形DCPも直角をはさむ2辺の長さが9cmと12cmなので
2辺の長さとその間の角が等しく、三角形ABEとDCPは
合同です。

よって $PD = EB = 15(\text{cm})$ となります。

図3

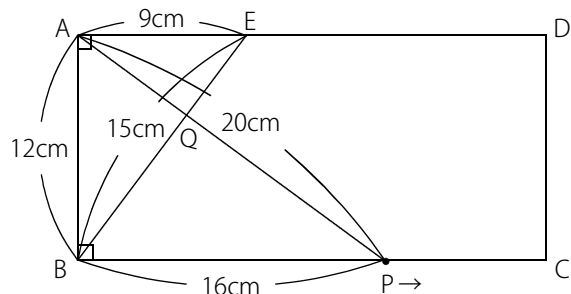


図4

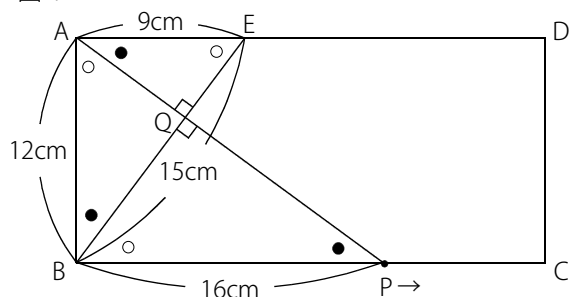
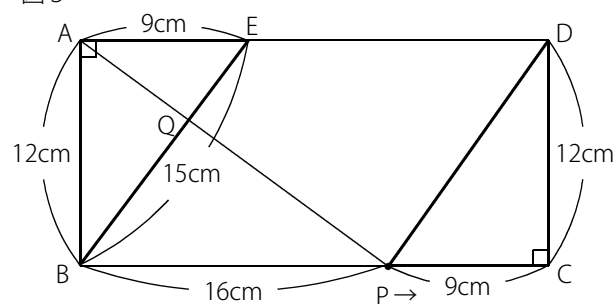


図5

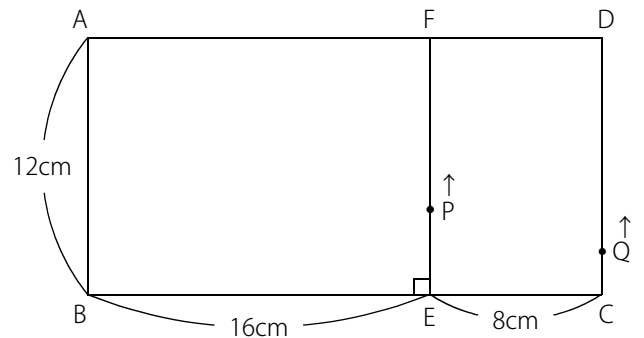




例題と解説

例題4

右図のような長方形ABCDがあります。点PはEを出発して秒速2cmでEF上を往復します。点Qは点Pと同時にCを出発して秒速1cmでCD上を往復します。このとき次の問いに答えなさい。



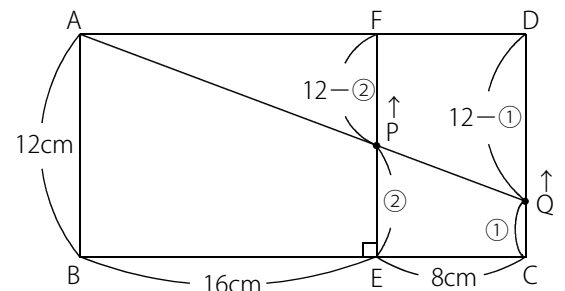
- (1) 3点 A, P, Q が初めて一直線上に並ぶのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 3点 B, P, Q が初めて一直線上に並ぶのは出発してから何秒後ですか。

答え (1) 3秒後 (2) 9秒後

[例題4の解説]

- (1) 点Pは秒速2cm, 点Qは秒速1cmなので速さの比は 2 : 1 です。
3点 A, P, Q が初めて一直線上に並ぶまでに点Pと点Qが進む距離をそれぞれ ②, ① とすると右図1のようになります。

図1



FPとDQは平行なので三角形AFPと三角形ADQは相似です。

三角形AFPと三角形ADQの相似比は $AF : AD = 16 : 24 = 2 : 3$ なので

$FP : DQ = 2 : 3$ より 比例式 $(12 - ②) : (12 - ①) = 2 : 3$ が成り立ちます。

(内項の積) = (外項の積) より $(12 - ①) \times 2 = (12 - ②) \times 3$

つまり $24 - ② = 36 - ⑥$ なので整理すると $④ = 12$, $① = 12 \div 4 = 3(\text{cm})$

(点Pが進んだ距離) = $② = 3 \times 2 = 6(\text{cm})$ なので

3点 A, P, Q が初めて一直線上に並ぶのは出発してから $6 \div 2 = 3(\text{秒後})$



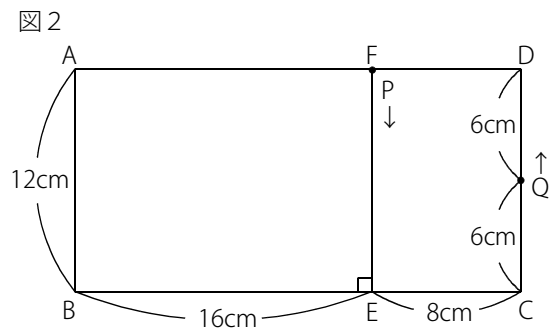
例題と解説

- (2) 3点 B, P, Q が2度目に一直線上に並ぶのは点Pが直線上を折り返した後です。

点PがFに着くまでにかかる時間は $12 \div 2 = 6$ (秒)

このとき点QはCから $1 \times 6 = 6$ (cm) のところに

来ているので右図2のようになります。



この後で3点 B, P, Q が一直線上に並ぶまでに進む距離をそれぞれ ②, ① とすると右図3のようになります。

三角形BEPと三角形BCQの相似比は $BE : BC = 16 : 24 = 2 : 3$
 なので $EP : CQ = 2 : 3$ より 比例式 $(12 - ②) : (6 + ①) = 2 : 3$
 が成り立ちます。

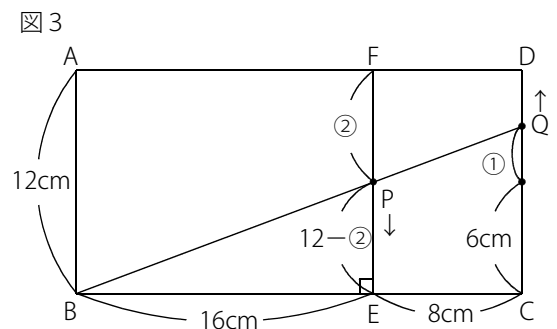
(内項の積) = (外項の積) より $(6 + ①) \times 2 = (12 - ②) \times 3$

つまり $12 + ② = 36 - ⑥$ なので整理すると $⑧ = 24$, $① = 24 \div 8 = 3$ (cm)

図2のときから (点Pが進んだ距離) = ② = $3 \times 2 = 6$ (cm)

点Pが6cm進むのにかかる時間は $6 \div 2 = 3$ (秒)

図2のとき出発してから6秒後なので3点 B, P, Q が一直線上に並ぶのは出発してから $6 + 3 = 9$ (秒後)



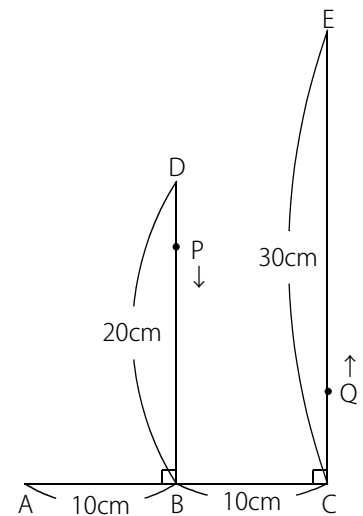


例題と解説

例題5

右図で点PはDを出発して秒速3cmでDB上を往復します。また点Qは点Pと同時にCを出発して秒速4cmでCE上を往復します。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 3点 A, P, Q が初めて一直線上に並ぶのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 3点 A, P, Q が2度目に一直線上に並ぶのは出発してから何秒後ですか。



答え (1) 4秒後 (2) 10秒後

[例題5の解説]

- (1) 点Pは秒速3cm, 点Qは秒速4cmなので速さの比は 3 : 4 です。
3点 A, P, Q が初めて一直線上に並ぶまでに点Pと点Qが進む距離をそれぞれ ③, ④ とすると右図1のようになります。

BDとCEは平行なので、このとき三角形ABPと三角形ACQは相似です。
三角形ABPと三角形ACQの相似比は $AB : AC = 10 : 20 = 1 : 2$ なので
 $BP : CQ = 1 : 2$ より 比例式 $(20 - ③) : ④ = 1 : 2$ が成り立ちます。

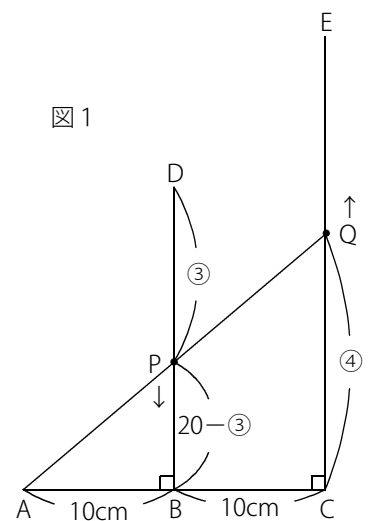
(内項の積) = (外項の積) より $④ \times 1 = (20 - ③) \times 2$

つまり $④ = 40 - ⑥$ なので整理すると $⑩ = 40$, $① = 40 \div 10 = 4(\text{cm})$

(点Pが進んだ距離) = ③ = $4 \times 3 = 12(\text{cm})$ なので

3点 A, P, Q が初めて一直線上に並ぶのは出発してから $12 \div 3 = 4(\text{秒後})$

図1





例題と解説

- (2) 3点 A, P, Q が2度目に一直線上に並ぶのは点Pと点Qがともに直線上を折り返した後です。

点PがBに着くまでにかかる時間は $20 \div 3 = 6\frac{2}{3}$ (秒)

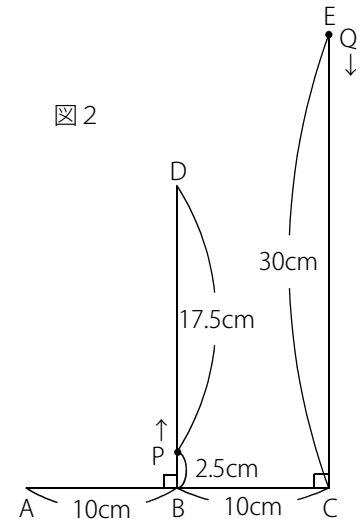
点QがDに着くまでにかかる時間は $30 \div 4 = 7.5$ (秒)

点Qの方が折り返すまでにかかる時間が長いので

点QがEに着いたときをもとに考えます。

このとき点PはBから $3 \times 7.5 - 20 = 2.5$ (cm) のところに

来ているので右図2のようになります。



この後で3点 A, P, Q が一直線上に並ぶまで進む距離を

それぞれ ③, ④ とすると右図3のようになります。

三角形ABPと三角形ACQの相似比は $AB : AC = 10 : 20 = 1 : 2$ なので

$BP : CQ = 1 : 2$ より 比例式 $(③ + 2.5) : (30 - ④) = 1 : 2$ が成り立ちます。

(内項の積) = (外項の積) より $(30 - ④) \times 1 = (③ + 2.5) \times 2$

つまり $30 - ④ = ⑥ + 5$ なので整理すると $⑩ = 25$, $① = 25 \div 10 = 2.5$ (cm)

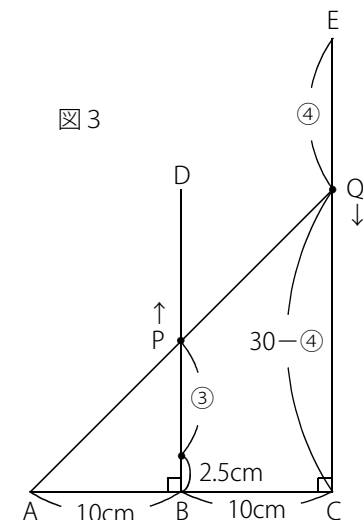


図2のときから (点Pが進んだ距離) = ③ = $2.5 \times 3 = 7.5$ (cm)

点Pが7.5cm進むのにかかる時間は $7.5 \div 3 = 2.5$ (秒)

図2のとき出発してから7.5秒後なので3点 A, P, Q が2度目に一直線上に並ぶのは

出発してから $7.5 + 2.5 = 10$ (秒後)

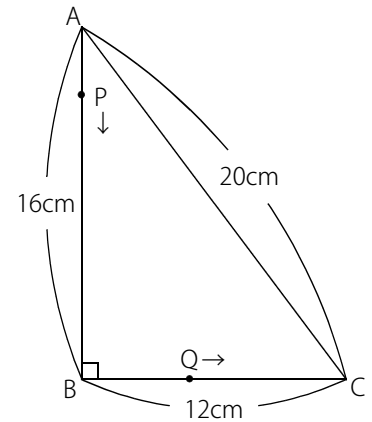


例題と解説

例題6

右図のような直角三角形ABCがあります。点PはAを出発して秒速1cmで矢印の方向に進み三角形ABCの辺上を1周します。また点Qは点Pと同時にBを出発し秒速3cmで矢印の方向に進み、三角形ABCの辺上を1周します。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 直線PQが辺ACと初めて平行になるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 直線PQが辺BCと初めて平行になるのは出発してから何秒後ですか。



答え (1) 3.2秒後 (2) $7\frac{9}{17}$ 秒後

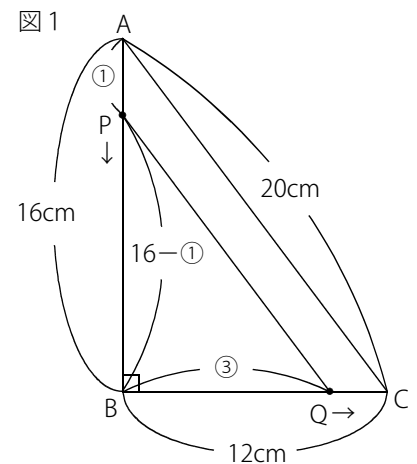
[例題6の解説]

- (1) 点Pは秒速1cm，点Qは秒速3cmなので速さの比は 1 : 3 なので進む距離をそれぞれ ①，③ とすると右図1 のようになります。

直線PQが辺ACと平行になるとき三角形ABCと三角形PBQは相似です。
三角形ABCは3辺の長さの比が 12 : 16 : 20 = 3 : 4 : 5 なので
三角形PBQの3辺の長さの比も 3 : 4 : 5 です。

BQ : BP = 3 : 4 より 比例式 ③ : (16 - ①) = 3 : 4 が成り立ちます。
(内項の積) = (外項の積) より (16 - ①) × 3 = ③ × 4
つまり 48 - ③ = ⑫ なので整理すると ⑮ = 48，① = 48 ÷ 15 = 3.2(cm)

(点Pが進んだ距離) = ① = 3.2(cm) なので
直線PQが辺ACと初めて平行になるのは出発してから 3.2 ÷ 1 = 3.2(秒後)



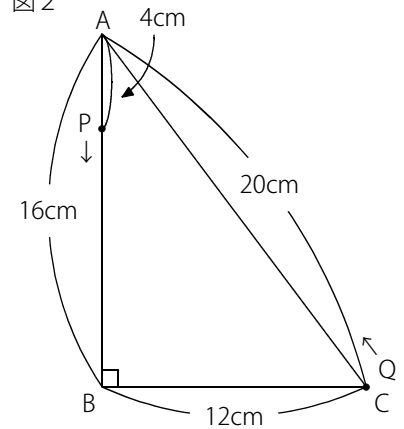


例題と解説

- (2) 直線PQが辺BCと初めて平行になるのは点Qが辺AC上にあるときです。
点QがCに着くまでにかかる時間は $12 \div 3 = 4$ (秒)

このとき点PはAから $1 \times 4 = 4$ (cm) のところに来ているので
右図2のようになります。

図2



この後で直線PQが辺BCと初めて平行になるまでに進む距離を
それぞれ ①, ③ とすると右図3のようになります。

直線PQが辺BCと平行になるとき三角形ABCと三角形APQは相似です。

三角形ABCは3辺の長さの比が $12 : 16 : 20 = 3 : 4 : 5$ なので
三角形APQの3辺の長さの比も $3 : 4 : 5$ です。

$$AP : AQ = 4 : 5 \text{ なので } AQ = (4 + \textcircled{1}) \times \frac{5}{4} = 5 + \textcircled{1.25}$$

$$AC = AQ + QC = 5 + \textcircled{1.25} + \textcircled{3} = 5 + \textcircled{4.25}$$

$$5 + \textcircled{4.25} = 20(\text{cm}) \text{ なので } \textcircled{4.25} = 15(\text{cm}), \textcircled{1} = \frac{15}{4.25} = 3\frac{9}{17}(\text{cm})$$

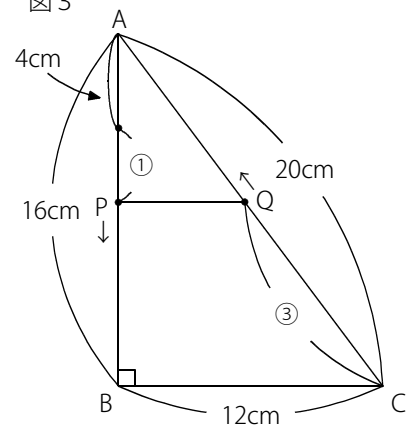
$$\text{図2のときから (点Pが進んだ距離)} = \textcircled{1} = 3\frac{9}{17}(\text{cm})$$

$$\text{点Pが} 3\frac{9}{17}\text{cm進むのにかかる時間は } 3\frac{9}{17} \div 1 = 3\frac{9}{17}(\text{秒})$$

図2のとき出発してから4秒後なので直線PQが辺BCと初めて平行になるのは

$$\text{出発してから } 4 + 3\frac{9}{17} = 7\frac{9}{17}(\text{秒後})$$

図3





例題と解説

ポイントまとめ

- ・点の移動の問題では進んだ距離を○数字などで表して相似に着目します。
- ・台形の場合は平行線を引いて三角形の相似に着目するという考え方に慣れておきましょう。
- ・ある状態になる「2回目」や「3回目」に着目するときは、移動する点を頂点や折り返し点まで進めてから考えると解きやすくなります。