中学受験Unit.23- 2　5年　場合の数２
工夫して数える2

例題と解説

例題１

区別のつかない7個のボールを A，B，C の3人で分けます。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　1個ももらえない人がいないように分けるとき、その分け方は全部で何通りありますか。

（２）　1個ももらえない人がいてもいいとすると、その分け方は全部で何通りありますか。

答え　（１）15通り（２）36通り

[例題１の解説]

（１）　少なくとも1個はもらうことができるので、3人にまず1個ずつ配ります。

このとき残りのボールは 7－3＝4(個)

この4個を3人に分けます。A，B，C のもらう個数を (1，1，2) のように表すとします。

4個を1人がもらう場合　(4，0，0)，(0，4，0)，(0，0，4) の3通り

3個と1個を2人がもらう場合

(3，1，0)，(3，0，1)，(0，3，1)，(1，3，0)，(1，0，3)，(0，1，3) の6通り

※計算で求める場合は、もらう人を3人から2人選ぶので、選び方は $_3C_2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$(通り)

さらにどちらが3個をもらうかでそれぞれ2通りあるので全部で 3×2＝6(通り)

2個を2人がもらう場合　(2，2，0)，(2，0，2)，(0，2，2) の3通り

2個と1個と1個を3人がもらう場合　(2，1，1)，(1，2，1)，(1，1，2) の3通り

よって全部で 3＋6＋3＋3＝15(通り)

※少なくとも1個ずつもらうので、先に配っておいて、残りを場合分けして考えましょう。

中学受験Unit.23- 2　5年　場合の数２
工夫して数える2

例題と解説

(別解)

右図１のように「仕切り」を2つ用いて横一列に並んだ7個のボールを区切ります。

図１

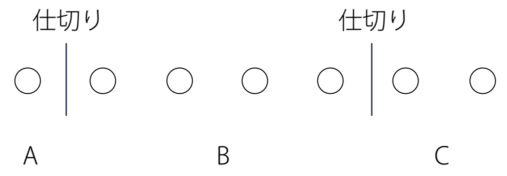
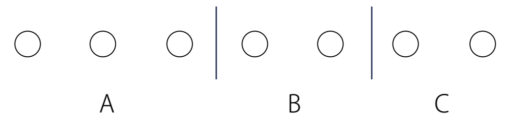


図１はAは1個，Bは4個，Cは2個というふうに分けることを表しています。つまり (1，4，2) の場合です。

同じように例えば図２のように仕切りを入れると
3人のもらう個数は (3，2，2) となります。

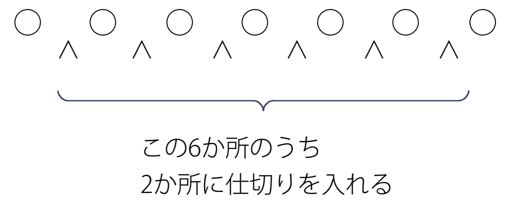
図２



つまり7個のボールの間にどのように2本の仕切りを入れるかを考えれば、ボールの分け方の総数を求めることができます。

7個のボールを横１列に並べると、
仕切りを入れるところは右図３のように6か所あります。

図３



6か所のうち2か所に仕切りを入れるので、
6つから2つを選ぶ場合と同じです。

よって $_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$(通り)

※「仕切り」を使って分ける考え方はとても重要で、知らなければ時間内に解くことが難しい問題も出題されます。
しっかりと理解して慣れておきましょう。

中学受験Unit.23- 2　5年　場合の数２
工夫して数える2

例題と解説

（2）　次は7個のボールを1個ももらえない人がいてもいいという条件で3人に分けます。
仕切りを使った考え方を利用します。

この場合は図４や図５のような仕切りの入れ方も考えられます。

図４　(0，2，5) の場合

｜○　○｜○　○　○　○　○

A 0個　B 2個　C 5個

図５　(7，0，0) の場合

○　○　○　○　○　○　○｜｜

A 7個　B 0個　C 0個

右図６のように
「 7＋1＝8(か所) から仕切りを入れる2か所を選ぶ」
とすればよさそうですが、図５のように端（はし）に2つの
仕切りを入れることもあるのでこの考え方はまちがいです。

図６

∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧
端 　　　　　　　　　　　　　　　端

この8か所のうち
2か所に仕切りを入れる

ここで右図７のようにボール7個と仕切り2個の合計9個を
並べかえる、というふうに考えます。
この場合であれば端に仕切りが2個連続してもかまいません。

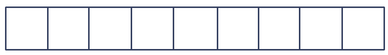
図７

ボール7個と仕切り2個の合計9個の並べかえ

(1，6，0) → ○｜○ ○ ○ ○ ○ ○｜
(0，0，7) → ｜｜○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
(2，4，1) → ○ ○｜○ ○ ○ ○｜○
(0，7，0) → ｜○ ○ ○ ○ ○ ○ ○｜

つまり右図８のように9個のうち仕切りを入れる2個を選べば
いいということなので $_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$(通り)

図８



9マスのうち2つのマスに仕切りを入れる。
残りは自動的に○が入る。

※0個でもいい場合と、少なくとも1個以上の場合で、きちんと
　整理して、慣れておきましょう。

例題と解説

(別解)

Aのもらう個数で場合分けをして数えます。

Aが0個のとき、BとCのもらう個数は
(7 , 0) , (6 , 1) , (5 , 2) , (4 , 3) , (3 , 4) , (2 , 5) , (1 , 6) , (0 , 7) の8通り

Aが1個のとき、BとCのもらう個数は
(6 , 0) , (5 , 1) , (4 , 2) , (3 , 3) , (2 , 4) , (1 , 5) , (0 , 6) の7通り

※このあたりで 8通り , 7通り , 6通り , 5通り , … となっていくことは予想がつきますが、
念のため、書き上げておきます。

Aが2個のとき、BとCのもらう個数は (5 , 0) , (4 , 1) , (3 , 2) , (2 , 3) , (1 , 4) , (0 , 5) の6通り
Aが3個のとき、BとCのもらう個数は (4 , 0) , (3 , 1) , (2 , 2) , (1 , 3) , (0 , 4) の5通り
Aが4個のとき、BとCのもらう個数は (3 , 0) , (2 , 1) , (1 , 2) , (0 , 3) の4通り
Aが5個のとき、BとCのもらう個数は (2 , 0) , (1 , 1) , (0 , 2) の3通り
Aが6個のとき、BとCのもらう個数は (1 , 0) , (0 , 1) の2通り
Aが7個のとき、BとCのもらう個数は (0 , 0) の1通り

よって全部で 8＋7＋6＋…＋1＝(1＋8)×8÷2＝36(通り)

※仕切りを利用する考え方は必ず覚えておくべきですが、この別解のようにだれか1人の個数を決めて
場合分けをするという考え方も非常に重要です。場合分けをして地道に調べることは場合の数の基本中の
基本なので忘れてはいけません。

例題と解説

例題２

1以上の3つの整数を足して5になる場合は 1＋1＋3，1＋3＋1，3＋1＋1，1＋2＋2，2＋1＋2，2＋2＋1 の6通りの計算方法が考えられます。同じように3つの整数を足して8になる場合について次の問いに答えなさい。

（１） 3つの整数をすべて1以上とします。このとき和が8になる計算方法は全部で何通りありますか。

（２） 3つの整数をすべて0以上とします。このとき和が8になる計算方法は全部で何通りありますか。

答え　（１）21通り（２）45通り

[例題２の解説]

（１）　仕切りを利用します。

例えば右図１のように仕切り入れた場合は 2＋5＋1＝8 を表しています。

図１

○　○｜○　○　○　○　○｜○

2　　　5　　　1

つまり右図２のように8個の○に2個の仕切りを入れれば、3つの整数に分けることができるので、7か所から2か所を選びます。

図２

○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○ ∧ ○

この7か所のうち2か所に仕切りを入れる

$_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$(通り)

よって3つの整数がすべて1以上で和が8になる計算方法は全部で21通りあることがわかります。

（２）　0になってもいいので、右図３のように仕切りを端に並べてもかまいません。

図３　0＋5＋3 の場合

｜○　○　○　○　○｜○　○　○

0　　　5　　　3

つまり8個の○と2個の仕切りの合計10個の並べかえなので図４のように10個から仕切りを入れる2個を選ぶと考えて、

計算方法は全部で $_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$(通り)

図４

10マスのうち2つのマスに仕切りを入れる。
残りは自動的に○が入る。

例題と解説

例題３

足す順番が異なるだけの場合は同じ計算だとすると、1以上の3つの整数を足して5になる場合は 1＋1＋3， 1＋2＋2 の2通りの計算方法があります。同じように1以上の3つの整数を足して20になる場合の計算方法は全部で何通りありますか。

答え 32通り

[例題３の解説]

3つの整数を小さい順に A，B，C とします。ただし A＝B＝C の場合もあるとします。
このとき 20÷3＝6あまり2 よりAは1以上6以下となります。
Aを決めて場合分けをして数えましょう。

A＝1 のとき BとCは (1，18)，(2，17)，(3，16)，(4，15)，(5，14)，(6，13)，(7，12)，(8，11)，(9，10) の**9通り**
※すべてを書き出さなくても (1，18)，(2，17) …，(9，10) で9通りだとわかります。
A＝2 のとき BとCは (2，16)，(3，15)，(4，14)，(5，13)，(6，12)，(7，11)，(8，10)，(9，9) の**8通り**
A＝3 のとき BとCは (3，14)，(4，13)，(5，12)，(6，11)，(7，10)，(8，9) の**6通り**
A＝4 のとき BとCは (4，12)，(5，11)，(6，10)，(7，9)，(8，8) の**5通り**
A＝5 のとき BとCは (5，10)，(6，9)，(7，8) の**3通り**
A＝6 のとき BとCは (6，7) の**1通り**

よって計算方法は全部で 9＋8＋6＋5＋3＋1＝32(通り)

※順番が異なるだけの場合は同じ計算だとするので、仕切りを利用することはできません。

例題と解説

例題４

整数の足し算について考えます。例えば1と2と3しか使えない場合、和が5になる計算方法は、足す順番が異なるだけの場合は同じ計算だとすると 1＋1＋1＋1＋1，1＋1＋1＋2，1＋1＋3，1＋2＋2，2＋3 の5通りが考えられます。
では2と3と5しか使えない場合、和が25になる計算方法は全部で何通りありますか。

答え 15通り

[例題４の解説]
何種類かの硬貨をそれぞれ何枚か用いて、ある一定の合計金額になるようにする場合の数の求め方を利用します。
例えば 100円玉と50円玉と10円玉を用いて合計金額が150円になるような場合は次のようになります。

100円玉(枚)	1	1	0	0	0	0
50円玉(枚)	1	0	3	2	1	0
10円玉(枚)	0	5	0	5	10	15

上の表より、6通りであることがわかります。

この問題でも同様に2と3と5で合計が25になるような場合の数を表を使って数えます。

5の個数	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
3の個数	0	1	2	0	5	3	1	6	4	2	0	7	5	3	1
2の個数	0	1	2	5	0	3	6	1	4	7	10	2	5	8	11

上の表より和が25になる計算方法は全部で15通りであることがわかります。

※上の表を見ると、5の個数が同じ場合、3の個数を2個減らして、2の個数を3個増やしていることがわかります。
　これは3と2の最小公倍数が6なので、3を 6÷3＝2(個) 減らすと、2は 6÷2＝3(個) 増やさなければならないからです。

例題と解説

例題５

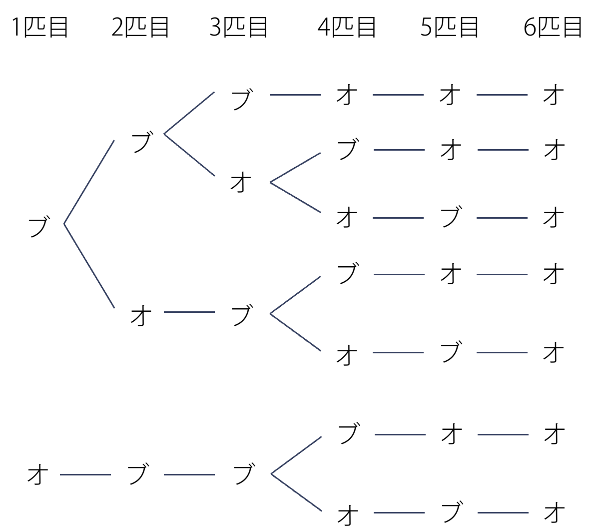
オオカミ3匹とブタ3匹の合計6匹を同じオリの中に1匹ずつ入れていきます。ただし、オリの中でブタの数よりもオオカミの数が多くなるとブタはオオカミに食べられてしまいます。オリの中のオオカミとブタが1匹ずつのように同じ数の場合は食べられることはありません。ブタがオオカミに食べられないような6匹の入れる順序は全部で何通りありますか。

答え 7通り

[例題５の解説]

樹形図を書いて整理します。

このとき右図のようになるので全部で7通り



(別解1)

ブタが食べられないような最初の3匹の入れ方で場合分けをして求めます。

最初の3匹の入れ方は（ブ，ブ，ブ），(ブ，ブ，オ），(ブ，オ，ブ)（オ，ブ，ブ）の4通りが考えられます。

※最後の1匹はオオカミを入れなければならないことに注意しましょう。

(ブ，ブ，ブ)の場合 残りの3匹の入れ方は（オ，オ，オ）の**1通り**

(ブ，ブ，オ)の場合 残りの3匹の入れ方は（ブ，オ，オ），(オ，ブ，オ）の**2通り**

(ブ，オ，ブ)の場合 残りの3匹の入れ方は（ブ，オ，オ），(オ，ブ，オ）の**2通り**

(オ，ブ，ブ)の場合 残りの3匹の入れ方は（ブ，オ，オ），(オ，ブ，オ）の**2通り**

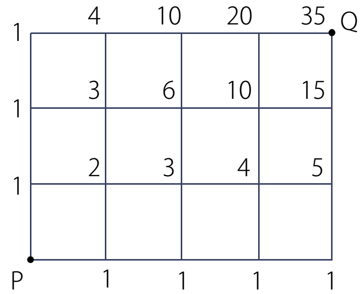
よって全部で 1＋2＋2＋2＝7(通り)

例題と解説

(別解2)

マス目の移動の場合の数の求め方を利用します。
例えば右図１のようなマス目でPからQに進む場合は35通りになります。

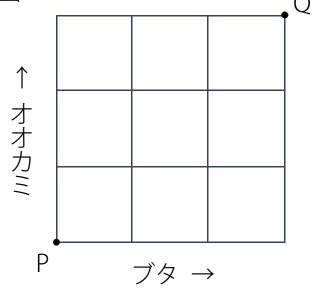
図１



オオカミ3匹とブタ3匹をオリの中に1匹ずつ入れていくので、
「マス目で上に1マス移動する」＝「オオカミを1匹オリに入れる」
「マス目で右に1マス移動する」＝「ブタを1匹オリに入れる」
とします。

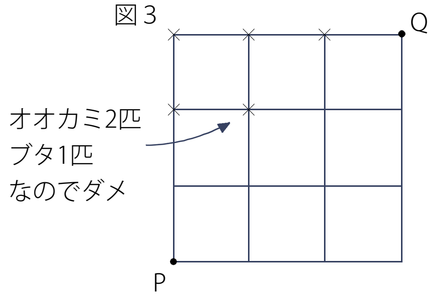
このときオオカミとブタはそれぞれ3匹ずつなので右図２のように
縦に3マス，横に3マスのマス目を用います。

図２



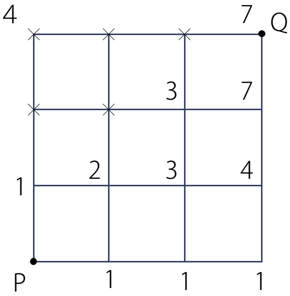
ブタよりもオオカミが多くなってしまうといけないので、
図３のようにオオカミの方が多くなってしまうところを「×」にします。
例えば図３の上に2マス右に1マスのところは「オオカミ2匹，ブタ1匹」と
なるので×です。この×をつけたところは通ることができません。

図３



あとはマス目の問題と同じようにPからQに進む場合を書き入れていきます。
図４のようになるので答えは7通りとなります。

図４



※最初にオオカミを入れてもいいというところがポイントです。

※このマス目を使った解法は**「カタラン数」**という特別な数にもとづいた考え方です。
※はじめは少しわかりづらい考え方かもしれませんが、一方がもう一方の個数をこえてはいけない
　といった制限がついた場合の数の問題ではカタラン数の解法を利用するとすばやく正確に答えを
　求めることができます。
※決して特殊な解き方というわけではなく、**難関校受験では定番の解法**です。

中学受験Unit.23- 2　5年　場合の数２
工夫して数える2

例題と解説

例題６

図１のように4つのマス目に1～4の数字を1つずつ入れていきます。ただしどの数も真上の数より小さく、右どなりの数より小さいものとします。このとき図２のように2通りに入れ方が考えられます。このルールで図３のような8つのマス目に1～8の数字を入れるとき、その入れ方は全部で何通りありますか。

図１

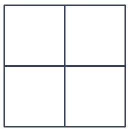


図２

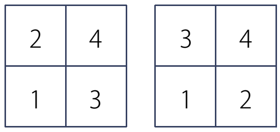
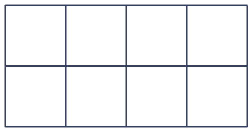


図３



答え 14通り

[例題６の解説]

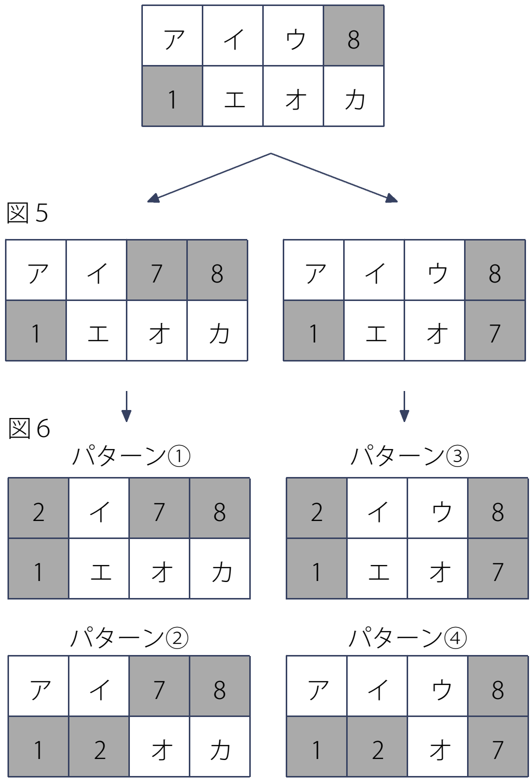
まずはじめに1と8の位置は右図４のように決まります。

また7は図５のようにウかカのどちらかです。

また2はアかエのどちらかなので図６の4つのパターンが考えられます。

あとはこの4つのパターンで場合分けをして数え上げます。

図４



パターン①の場合

(イ,エ,オ,カ)＝(4, 3, 5, 6)，(5, 3, 4, 6)，(6, 3, 4, 5) **の3通り**

パターン②の場合

(ア,イ,オ,カ)＝(3, 4, 5, 6)，(3, 5, 4, 6)，(3, 6, 4, 5)，(4, 5, 3, 6)，
(4, 6, 3, 5)，(5, 6, 3, 4) **の6通り**

パターン③の場合　(イ,ウ,エ,オ)＝(5, 6, 3, 4)，(4, 6, 3, 5) **の2通り**

パターン④の場合　(ア,イ,ウ,オ)＝(3, 5, 6, 4)，(3, 4, 6, 5)，
(3, 4, 6, 5) **の3通り**

よって全部で 3＋6＋2＋3＝14(通り)

中学受験Unit.23- 2　5年　場合の数２
工夫して数える2

例題と解説

(別解)

8個のマス目に**1から小さい順番に**数を入れていくことにします。

このとき、**数字を入れたマス目の個数**はつねに**上の段が下の段より多くなってはいけません。**

例えば右図７のように3まで数字を入れたとします。

次に入れる数は4ですが、Aの位置に入れることはできません。

さらに、Bの位置に入れると、いずれ数字を入れていくことができなくなります。

同じように例えば右図８のように5まで数字を入れたとします。

次に入れる数は6ですが、Aの位置に入れることはできません。

さらに、Bの位置に入れると、いずれ数字を入れていくことができなくなります。

図７

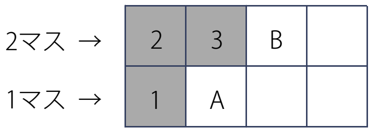
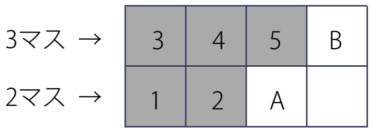


図８



つねに上の段の数字の個数が下の段の数字の個数より多くなってはいけません。

つまり「オオカミの数がブタの数より多くなってはいけない」という場合と同じです。

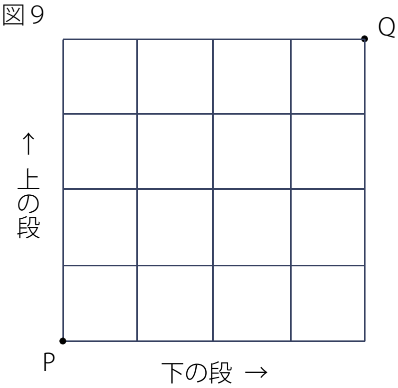
上の段に4つ、下の段に4つの数なので右図9のように縦に４マス，横に４マスのマス目を用います。

「マス目で上に1マス移動する」＝「上の段に1つ数を入れる」

「マス目で右に1マス移動する」＝「下の段に1つ数を入れる」

とします。

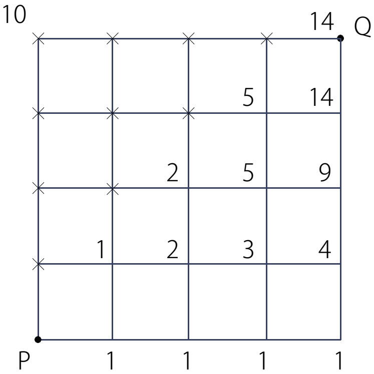
図９



上の段の数の個数が下の段の数の個数より多くなってしまうところに×をつけてマス目の進み方を書き入れていくと右図10のようになります。

よって全部で14通り

図10



中学受験Unit.23- 2　5年　場合の数２
工夫して数える2

例題と解説

例題７

コインを何回か投げて、表と裏の出方について考えます。例えばコインを2回投げた場合は（表 ，表），(表 ，裏)，(裏 ，表)，(裏 ，裏) の4通りが考えられます。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　コインを4回投げます。このとき表と裏の出方は全部で何通りありますか。

（２）　コインを6回投げます。途中で裏の出た回数が表の出た回数よりも多くならないような出方は全部で何通りありますか。

答え　（１）16通り（２）　20通り

[例題７の解説]

（１）　毎回、表か裏の2通りずつなので、4回投げると全部で 2×2×2×2＝16(通り)

（２）　表と裏の回数で場合分けをして、数えづらい場合はマス目を利用します。また表を○，裏を●とします。

6回全部が表の場合は明らかに**1通り**

5回が表で1回が裏の場合は1回目に裏が出なければいいので、裏が出るのが2〜6回目のどれかと考えると**5通り**

※(○,●,○,○,○,○)，(○,○,●,○,○,○)，(○,○,○,●,○,○)，(○,○,○,○,●,○)，(○,○,○,○,○,●)

4回が表で2回が裏の場合は右図１のマス目を利用します。

上に進むのを表が出る回数，右に進むのを裏が出る回数とします。

このとき図１のように**9通り**

3回が表で3回が裏の場合は右図２のマス目を利用します。

このとき図２のように**5通り**

2回が表で4回が裏のように裏の回数のほうが多いとき、あてはまる場合はありません。

よって全部で 1＋5＋9＋5＝20(通り)

図１

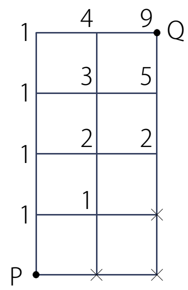
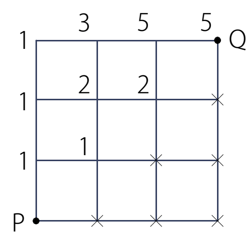


図２



例題と解説

ポイントまとめ

・「仕切り」を使って分ける考え方はとても重要で、知らなければ時間内に解くことが難しい問題も出題されます。

7個のボールを A，B，C の3人で分けるとき

少なくとも1個もらう場合は、7個のボールの間の6か所から仕切りを入れる2か所を選ぶ。

1個ももらえない人がいる場合は、7個のボールと2個の仕切りを合わせた9個を並べかえる。

→つまり9個から仕切りになる2個を選ぶ。

・マス目を使った解法は**「カタラン数」**という特別な数にもとづいた考え方です。**難関校受験では定番の解法**です。

理解してマスターしておきたい解法です。