



例題 1

下のように分母が6で分子が1から40までの40個の分数があります。これらの分数について次の問いに答えなさい。

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{39}{6}, \frac{40}{6}$$

- (1) 約分できない分数の個数を求めなさい。
- (2) 約分できない分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。
- (3) 約分できる分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

答え (1) 13個 (2) $42\frac{1}{6}$ (3) $94\frac{1}{2}$

[例題 1 の解説]

- (1) 既約分数の個数を求めるために、約分できる分数の個数を求めます。

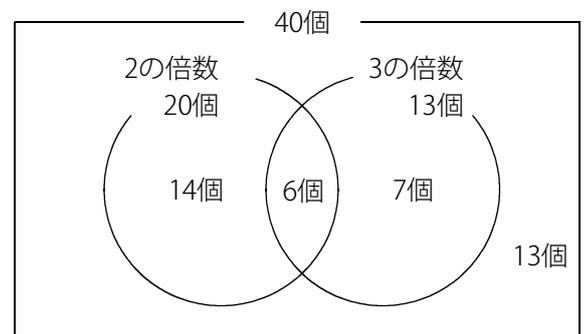
分母が6なので、分子が6と1以外の公約数を持つ場合は約分できます。

6を素因数分解すると $6=2 \times 3$ なので 分子が2, 3の倍数であれば約分できます。

ベン図は右図のようになります。

約分できる分数は $14+6+7=27$ (個)

約分できない分数は $40-27=13$ (個)





(別解)

仮分数を帯分数にして考えます。

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6} \quad \leftarrow \text{約分できない分数(既約分数)は2個}$$

$$1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{2}{6}, 1\frac{3}{6}, 1\frac{4}{6}, 1\frac{5}{6} \quad \leftarrow \text{同じように、約分できない分数(既約分数)は2個}$$

$$2, 2\frac{1}{6}, 2\frac{2}{6}, 2\frac{3}{6}, 2\frac{4}{6}, 2\frac{5}{6} \quad \leftarrow \text{同じように、約分できない分数(既約分数)は2個}$$

$$3, 3\frac{1}{6}, 3\frac{2}{6}, 3\frac{3}{6}, 3\frac{4}{6}, 3\frac{5}{6} \quad \leftarrow \text{同じように、約分できない分数(既約分数)は2個}$$

$$4, 4\frac{1}{6}, 4\frac{2}{6}, 4\frac{3}{6}, 4\frac{4}{6}, 4\frac{5}{6} \quad \leftarrow \text{同じように、約分できない分数(既約分数)は2個}$$

$$5, 5\frac{1}{6}, 5\frac{2}{6}, 5\frac{3}{6}, 5\frac{4}{6}, 5\frac{5}{6} \quad \leftarrow \text{同じように、約分できない分数(既約分数)は2個}$$

$$6, 6\frac{1}{6}, 6\frac{2}{6}, 6\frac{3}{6}, 6\frac{4}{6} \quad \leftarrow \text{約分できない分数(既約分数)は1個}$$

よって $2 \times 6 + 1 = 13$ (個)

$$(2) \quad \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 1\frac{1}{6} + 1\frac{5}{6} + 2\frac{1}{6} + 2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{6} + 3\frac{5}{6} + 4\frac{1}{6} + 4\frac{5}{6} + 5\frac{1}{6} + 5\frac{5}{6} + 6\frac{1}{6} = 42\frac{1}{6}$$



例題と解説

(別解)

$\frac{1}{6}$ から $\frac{40}{6}$ で最後の $\frac{40}{6}$ が整数にならないので、

図1のようにペアで考えても和が等しくなりません。

そこで $\frac{1}{6}$ から $\frac{42}{6}$ までを考えます。

このときベン図は図2のようになります。

約分できる分数は $14+7+7=28$ (個)

約分できない分数は $42-28=14$ (個)

※約分できない分数に $\frac{41}{6}$ が加わるので

約分できない分数は $13+1=14$ (個)

と考えてもかまいません。

等差数列ではありませんが、ペアで7になるので等差数列の和の公式を利用します。

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{41}{6}\right) \times 14 \div 2 = 49$$

問題は $\frac{1}{6}$ から $\frac{40}{6}$ なので $\frac{41}{6}$ をひきます。

$$(\text{約分できない分数の和}) = 49 - \frac{41}{6} = 42\frac{1}{6}$$

図1

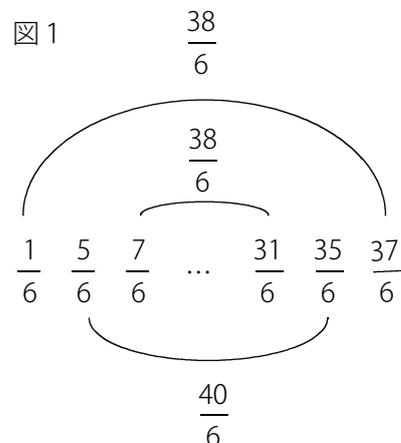


図2

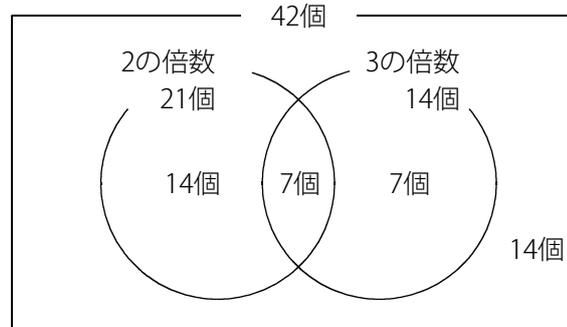
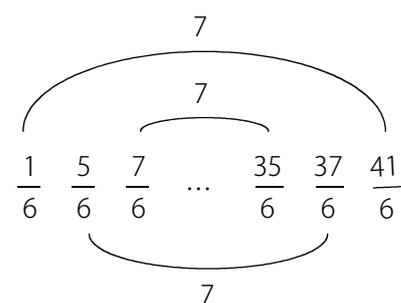


図3





例題と解説

(3) $\frac{1}{6}$ から $\frac{40}{6}$ までの和は等差数列の和の公式を用いて $\left(\frac{1}{6} + \frac{40}{6}\right) \times 40 \div 2 = \frac{820}{6} = 136\frac{2}{3}$ であることがわかります。

$$\text{(約分できない分数の和)} = 42\frac{1}{6} \text{ より } \text{(約分できる分数の和)} = 136\frac{2}{3} - 42\frac{1}{6} = 94\frac{1}{2}$$

(別解)

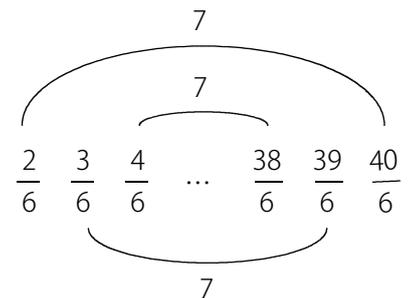
約分できる分数のペアについて考えます。

右図のようにペアで和が7になり和が等しくなります。

等差数列ではありませんが、等差数列の和の公式を利用します。

約分できる分数の個数は27個なので

$$\text{(約分できる分数の和)} = \left(\frac{2}{6} + \frac{40}{6}\right) \times 27 \div 2 = \frac{567}{6} = 94\frac{1}{2}$$





例題2

下のように分母が6で分子が1から100までの100個の分数があります。

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{99}{6}, \frac{100}{6}$$

このうち5より大きく15より小さい分数で約分できない分数は何個ありますか。

答え 20個

[例題2の解説]

仮分数を帯分数にして考えます。

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$$

← 約分できない分数(既約分数)は2個

$$1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{2}{6}, 1\frac{3}{6}, 1\frac{4}{6}, 1\frac{5}{6}$$

← 同じように、約分できない分数(既約分数)は2個

$$2, 2\frac{1}{6}, 2\frac{2}{6}, 2\frac{3}{6}, 2\frac{4}{6}, 2\frac{5}{6}$$

← 同じように、約分できない分数(既約分数)は2個

...

$$5, 5\frac{1}{6}, 5\frac{2}{6}, 5\frac{3}{6}, 5\frac{4}{6}, 5\frac{5}{6}$$

← 同じように、約分できない分数(既約分数)は2個

...

$$14, 14\frac{1}{6}, 14\frac{2}{6}, 14\frac{3}{6}, 14\frac{4}{6}, 14\frac{5}{6}$$

← 同じように、約分できない分数(既約分数)は2個

$$15, 15\frac{1}{6}, 15\frac{2}{6}, 15\frac{3}{6}, 15\frac{4}{6}, 15\frac{5}{6}$$

← 同じように、約分できない分数(既約分数)は2個

$$16, 16\frac{1}{6}, 16\frac{2}{6}, 16\frac{3}{6}, 16\frac{4}{6}$$

← 約分できない分数(既約分数)は1個

5から6, 6から7, 7から8, 8から9, 9から10, 10から11, 11から12, 12から13, 13から14, 14から15 にそれぞれ2個ずつなので全部で $2 \times 10 = 20$ (個)



(別解)

5より大きく15より小さい分数なので、 $\frac{31}{6}$ から $\frac{89}{6}$ までに約分できない分数が何個あるかを考えます。

6を素因数分解すると $6=2\times 3$ なので 分子が2, 3の倍数であれば約分できます。

$\frac{1}{6}$ から $\frac{89}{6}$ までの89個のうち約分できない分数は図1のように30個です。

$\frac{1}{6}$ から $\frac{30}{6}$ までの30個のうち約分できない分数は図2のように10個です。

図1

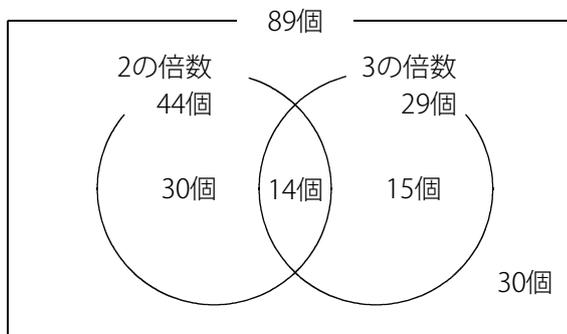
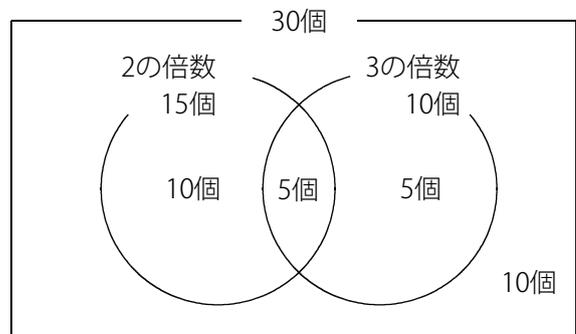


図2



よって $\frac{31}{6}$ から $\frac{89}{6}$ までで約分できない分数は $30-10=20$ (個)



ポイントまとめ

- ・約分できない分数の個数は、ベン図から約分できる分数の個数を求めて全体からひきます。
- ・約分できない分数の和を求めるときはペアの和が等しくなることを確認して、等差数列ではない場合がありますが等差数列の和の公式を利用することができます。
- ・約分できる分数の和は全体の和から約分できない分数の和をひきます。
※約分できる分数もペアの和が等しくなるのであれば、等差数列の和の公式を利用することができます。
- ・ $\frac{1}{A} \sim \frac{A}{A}$ のとき (約分できない分数の和) = (約分できない分数の個数) $\div 2$
- ・ペアの和が等しくならない場合は分数を付け足して考えます。
- ・帯分数にできる場合は帯分数にすることで考えやすくなります。