中学受験Unit.2- 2　5年　約数と倍数
約分できない分数1

例題と解説

例題１

下のように分母が12で分子が1から12までの12個の分数があります。これらの分数について次の問いに答えなさい。

$\frac{1}{12}$，$\frac{2}{12}$，$\frac{3}{12}$，…，$\frac{11}{12}$，$\frac{12}{12}$

（１）　約分できない分数の個数を求めなさい。

（２）　約分できない分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

（３）　約分できる分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

答え　（１）4個（２）2（３）$4\frac{1}{2}$

[例題１の解説]

約分できない分数、つまり既約分数（きやくぶんすう）について考えます。

例えば分母が6で分子が1から6までの $\frac{1}{6}$ ～ $\frac{6}{6}$ の6個の分数のうち、既約分数は $\frac{1}{6}$ と $\frac{5}{6}$ の2個です。

また既約分数の和は $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{6}{6}=1$ となります。

（１）　$\frac{1}{12}$，$\frac{2}{12}$，$\frac{3}{12}$，$\frac{4}{12}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{6}{12}$，$\frac{7}{12}$，$\frac{8}{12}$，$\frac{9}{12}$，$\frac{10}{12}$，$\frac{11}{12}$，$\frac{12}{12}$

このうち約分できる分数は $\frac{2}{12}$，$\frac{3}{12}$，$\frac{4}{12}$，$\frac{6}{12}$，$\frac{8}{12}$，$\frac{9}{12}$，$\frac{10}{12}$，$\frac{12}{12}$

よって約分できない分数は $\frac{1}{12}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{7}{12}$，$\frac{11}{12}$ の4個

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.2- 2　5年　約数と倍数
約分できない分数1

例題と解説

(別解)

分母が12なので、分子が12と1以外の公約数を持つ場合は約分できます。

12を素因数分解すると 12＝2×2×3 なので 分子が2または3の倍数であれば約分できます。

図１のようにベン図を書いて考えます。

図１

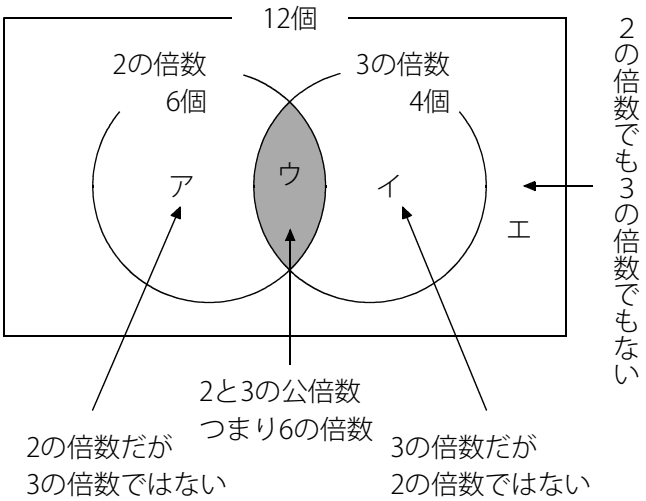
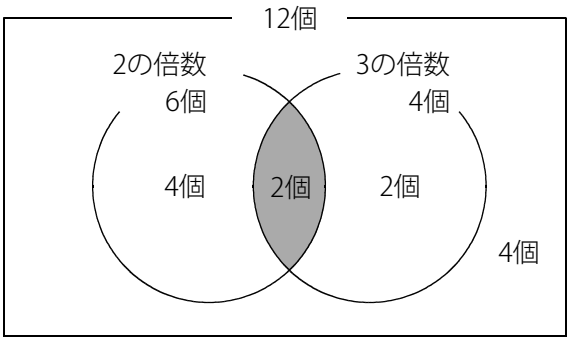


図２



12÷2＝6(個)　← 2の倍数

12÷3＝4(個)　← 3の倍数

12÷6＝2(個)　← 6の倍数

よって図２のようになります。

2または3の倍数は 4＋2＋2＝8(個) なので 2の倍数でも3の倍数でもない数は 12－8＝4(個)

この4個は 1，5，7，11 でこれらの数が分子の場合は約分できません。よって約分できない分数は4個です。

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.2- 2　5年　約数と倍数
約分できない分数1

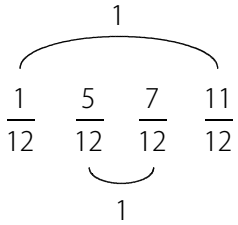
例題と解説

（2）　約分できない分数は $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$ の4個です。

$$\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{11}{12}=\frac{24}{12}=2$$

(別解)

右図のように2つで1つのペアになって和が1になっていることがわかります。



よって $\left(\frac{1}{12}+\frac{11}{12}\right)+\left(\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\right)=1+1=2$ となります。

約分できない分数は2つ合わせて1になることがわかります。

よって等差数列の和の公式（ガウスの公式）と同じように和を求めることができます。

(約分できない分数の和)$=\left(\frac{1}{12}+\frac{11}{12}\right)\times4\div2=1\times4\div2=2$

※ $\frac{1}{A}\sim\frac{A}{A}$ のとき **(約分できない分数の和)＝(約分できない分数の個数)÷2** となります。

（3）　$\frac{1}{12}$から$\frac{12}{12}$までの和は等差数列の和の公式を用いて $\left(\frac{1}{12}+\frac{12}{12}\right)\times12\div2=\frac{78}{12}=6\frac{1}{2}$ であることがわかります。

(約分できない分数の和)＝2 より (約分できる分数の和)$=6\frac{1}{2}-2=4\frac{1}{2}$

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.2- 2　5年　約数と倍数
約分できない分数1

例題と解説

例題２

下のように分母が90で分子が1から90までの90個の分数があります。これらの分数について次の問いに答えなさい。

$\frac{1}{90}$, $\frac{2}{90}$, $\frac{3}{90}$, … , $\frac{89}{90}$, $\frac{90}{90}$

（１） 約分できない分数の個数を求めなさい。

（２） 約分できない分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

（３） 約分できる分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

答え （１）24個（２）12（３）$33\frac{1}{2}$

[例題２の解説]

（１） 既約分数の個数を求めるために、約分できる分数の個数を求めます。

分母が90なので、分子が90と1以外の公約数を持つ場合は約分できます。

90を素因数分解すると 90＝2×3×3×5 なので 分子が2，3，5の倍数であれば約分できます。

90÷2＝45(個) ← 2の倍数

90÷3＝30(個) ← 3の倍数

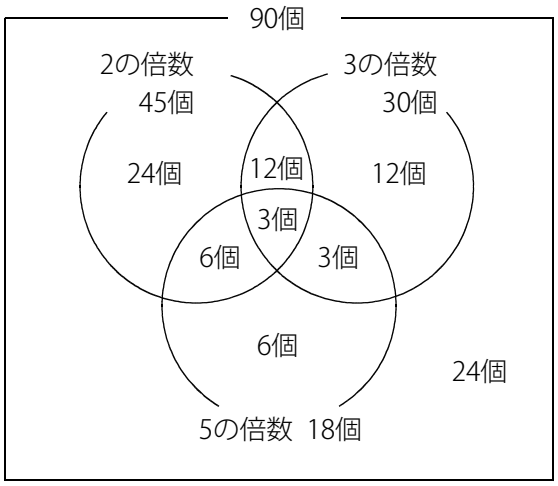
90÷5＝18(個) ← 5の倍数

90÷6＝15(個) ← 2と3の公倍数（6の倍数）

90÷10＝9(個) ← 2と5の公倍数（10の倍数）

90÷15＝6(個) ← 3と5の公倍数（15の倍数）

90÷30＝3(個) ← 2と3と5の公倍数（30の倍数）



ベン図は右図のようになります。

約分できる分数は 24＋12＋12＋6＋3＋3＋6＝66(個)

約分できない分数は 90－66＝24(個)

(C) 2014 min-san.com

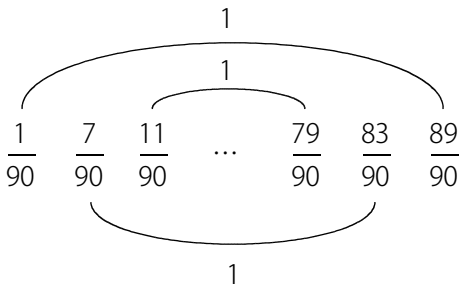
中学受験Unit.2- 2　5年　約数と倍数
約分できない分数1

例題と解説

（2）　約分できない最小の分数は$\frac{1}{90}$，最大の分数は$\frac{89}{90}$で約分できない分数は全部で24個です。

等差数列ではありませんが、ペアで1になるので等差数列の和の公式（ガウスの公式）を利用します。

(約分できない分数の和)$=\left(\frac{1}{90}+\frac{89}{90}\right)\times 24\div 2=1\times 24\div 2=12$



(別解)

$\frac{1}{A}\sim\frac{A}{A}$ のとき **(約分できない分数の和)＝(約分できない分数の個数)÷2** なので

(約分できない分数の和)＝24÷2＝12

※約分できない分数を書き上げて確かめておきます。

$$\frac{1}{90}+\frac{7}{90}+\frac{11}{90}+\frac{13}{90}+\frac{17}{90}+\frac{19}{90}+\frac{23}{90}+\frac{29}{90}+\frac{31}{90}+\frac{37}{90}+\frac{41}{90}+\frac{43}{90}+\frac{47}{90}+\frac{49}{90}+\frac{53}{90}+\frac{59}{90}+\frac{61}{90}+\frac{67}{90}+\frac{71}{90}+\frac{73}{90}$$

$$+\frac{77}{90}+\frac{79}{90}+\frac{83}{90}+\frac{89}{90}=\frac{90\times 12}{90}=12$$

（3）　$\frac{1}{90}$から$\frac{90}{90}$までの和は等差数列の和の公式を用いて $\left(\frac{1}{90}+\frac{90}{90}\right)\times 90\div 2=\frac{4095}{90}=45\frac{1}{2}$ であることがわかります。

(約分できない分数の和)＝12 より (約分できる分数の和)$=45\frac{1}{2}-12=33\frac{1}{2}$

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.2- 2　5年　約数と倍数
約分できない分数1

例題と解説

例題３

下のように分母が15で分子が1から60までの60個の分数があります。これらの分数について次の問いに答えなさい。

$\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$, … , $\frac{59}{15}$, $\frac{60}{15}$

（１） 約分できない分数の個数を求めなさい。

（２） 約分できない分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

（３） 約分できる分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

答え （１）32個（２）64（３）58

[例題３の解説]

（１） 既約分数の個数を求めるために、約分できる分数の個数を求めます。

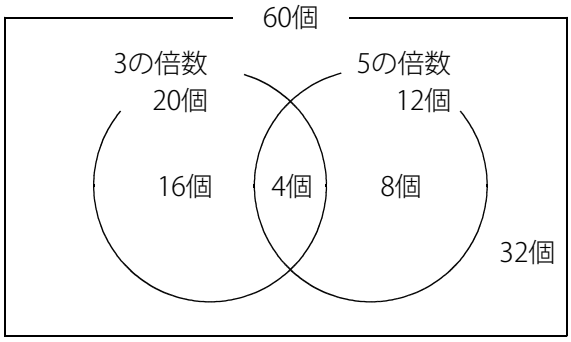
分母が15なので、分子が15と1以外の公約数を持つ場合は約分できます。

15を素因数分解すると 15＝3×5 なので 分子が3 , 5の倍数であれば約分できます。

60÷3＝20(個) ← 3の倍数

60÷5＝12(個) ← 5の倍数

60÷15＝4(個) ← 15の倍数



ベン図は右図のようになります。

約分できる分数は 16＋4＋8＝28(個)

約分できない分数は 60－28＝32(個)

(C) 2014 min-san.com

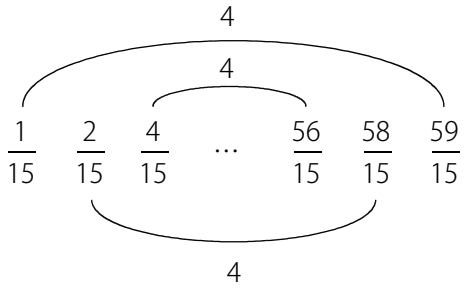
中学受験Unit.2- 2　5年　約数と倍数
約分できない分数1

例題と解説

（2）　約分できない最小の分数は$\frac{1}{15}$，最大の分数は$\frac{59}{15}$で、約分できない分数は全部で32個です。

等差数列ではありませんが、ペアで4になるので等差数列の和の公式（ガウスの公式）を利用します。

(約分できない分数の和)＝$\left(\frac{1}{15}+\frac{59}{15}\right)\times 32\div 2=4\times 32\div 2=64$



（3）　$\frac{1}{15}$から$\frac{60}{15}$までの和は等差数列の和の公式を用いて $\left(\frac{1}{15}+\frac{60}{15}\right)\times 60\div 2=\frac{1830}{15}=122$ であることがわかります。

(約分できない分数の和)＝64 より (約分できる分数の和)＝122－64＝58

ポイントまとめ

- 約分できない分数の個数は、ベン図から約分できる分数の個数を求めて全体からひきます。
- 約分できない分数の和を求めるときはペアの和が等しくなることを確認して、等差数列ではない場合もありますが等差数列の和の公式を利用することができます。
- 約分できる分数の和は全体の和から約分できない分数の和をひきます。
  ※約分できる分数もペアの和が等しくなるのであれば、等差数列の和の公式を利用することができます。
- $\frac{1}{A}$～$\frac{A}{A}$ のとき **(約分できない分数の和)＝(約分できない分数の個数)÷2**

(C) 2014 min-san.com