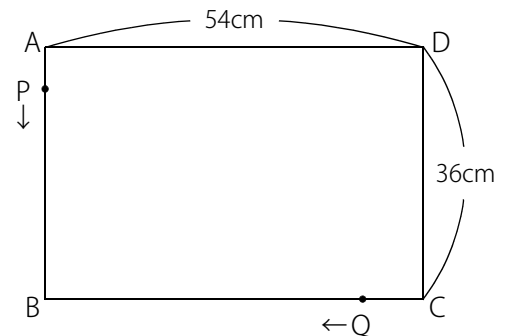




例題と解説

例題 1

右図のような長方形ABCDがあります。点PはAを、点QはCを同時に出発し、点Pは秒速5cm、点Qは秒速4cmで矢印の方向に長方形の辺上を回ります。このとき次の問いに答えなさい。



- (1) 点Pと点Qがはじめて出会うのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 点Pと点Qが2回目に出会うのははじめて出会ってから何秒後ですか。
- (3) 点Pと点Qが15回目に出会うのは出発してから何秒後ですか。
- (4) 出発してから25秒後のとき四角形ABPQの面積は何 cm^2 ですか。

答え (1) 10秒後 (2) 20秒後 (3) 290秒後 (4) 977cm^2

[例題 1 の解説]

- (1) はじめPとQは $54+36=90(\text{cm})$ はなれています。

2点は1秒間に $5+4=9(\text{cm})$ ずつ近づくので $90\div 9=10(\text{秒後})$ にはじめて出会います。

※ 2点の「出会い」なので「速さの和」を使います。

- (2) はじめて出会うのは出発してから10秒後なので下図1の位置で出会います。

長方形ABCDの1周は $(54+36)\times 2=180(\text{cm})$ なので図2のように1周180cmの円の周りを回るのと同じです。

図 1

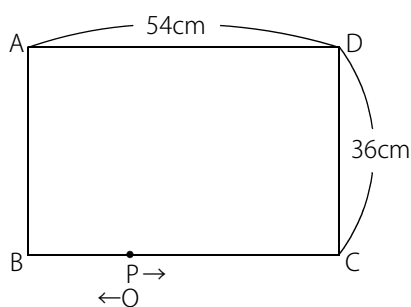
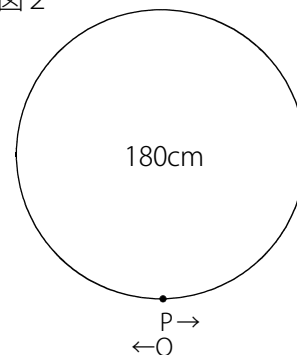


図 2



よってはじめて出会ってから $180\div (5+4)=20(\text{秒後})$ に2回目に出会います。



例題と解説

- (3) 出発してからはじめて出会うまでに $90 \div (5+4) = 10$ (秒) かかります。
はじめて出会ってから2回目に出会うまでに $180 \div (5+4) = 20$ (秒) かかります。
2回目に出会ってから3回目に出会うまでも同じように、2人合わせて180cm進めば出会うので
 $180 \div (5+4) = 20$ (秒) かかります。
3回目に出会ってから4回目に出会うまでも同じように $180 \div (5+4) = 20$ (秒) かかります。
4回目以降も出会うまでにそれぞれ20秒ずつかかります。
よって15回目に出会うのは出発してから $10 + 20 \times (15-1) = 10 + 280 = 290$ (秒後) です。

※ このときPは $5 \times 290 = 1450$ (cm) 進んでいるので $1450 \div 180 = 8$ あまり10(cm) より
PとQは辺AB上のAから10cmのところで出会います。

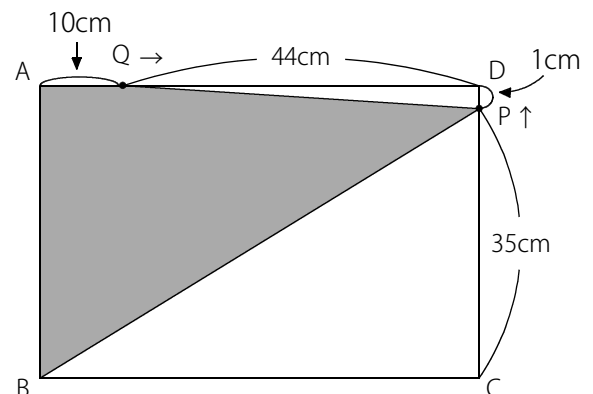
- (4) Pは25秒で $5 \times 25 = 125$ (cm) , Qは25秒で $4 \times 25 = 100$ (cm) 進みます。
このとき2点は右図の位置にあります。

四角形ABPQは三角形でも台形でもありません。
長方形ABCDから三角形BCPと三角形PDQを引いて、
四角形ABPQの面積を求めます。

$$\begin{aligned}(\text{長方形ABCDの面積}) &= 54 \times 36 = 1944(\text{cm}^2) \\(\text{三角形BCPの面積}) &= 54 \times 35 \div 2 = 945(\text{cm}^2) \\(\text{三角形PDQの面積}) &= 44 \times 1 \div 2 = 22(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

$$\text{よって (四角形ABPQの面積)} = 1944 - (945 + 22) = 977(\text{cm}^2)$$

※ 面積を求める方法は「直接求める」, 「全体からいらない部分を引いて求める」の2通りあります。



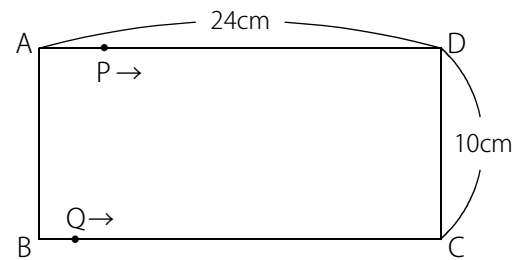


例題と解説

例題2

右図のような長方形ABCDがあります。点PはAを出発して秒速2cmで辺AD上を往復します。また点Qは点Pと同時にBを出発して秒速1cmで辺BC上を往復します。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 四角形ABQPの面積がはじめて長方形ABCDの面積の半分になるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) PQを結んでできる直線がはじめて辺ABと平行になるのは出発してから何秒後ですか。
ただし0秒のときはのぞきます。
- (3) PQを結んでできる直線が2回目に辺ABと平行になるのは出発してから何秒後ですか。
ただし0秒のときはのぞきます。

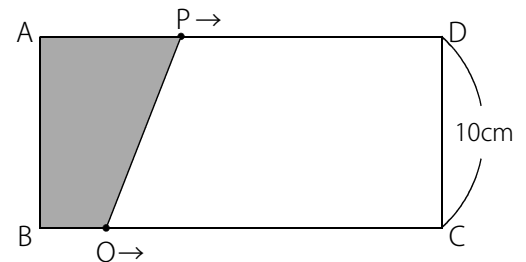


答え (1) 8秒後 (2) 16秒後 (3) 32秒後

[例題2の解説]

- (1) PはAD上を、QはBC上を往復するので、四角形ABQPは右図のようにつねに高さが10cmの台形です。

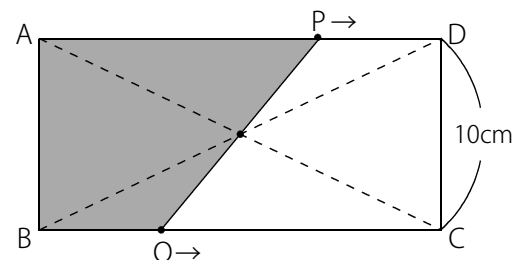
(長方形ABCDの面積) $=10 \times 24 = 240(\text{cm}^2)$ なので、その半分は 120cm^2
台形ABQPの面積が 120cm^2 になればいいので
 $(AP + BQ) \times 10 \div 2 = 120(\text{cm}^2)$ より $AP + BQ = 120 \times 2 \div 10 = 24(\text{cm})$



Pは秒速2cm, Qは秒速1cmなので1秒後には $AP + BQ = 2 + 1 = 3(\text{cm})$, 2秒後には $AP + BQ = (2 + 1) \times 2 = 6(\text{cm})$
つまり $AP + BQ$ は1秒で3cmずつ増えるので $AP + BQ = 24(\text{cm})$ になるのは出発してから $24 \div 3 = 8(\text{秒後})$ です。
よって四角形ABQPの面積がはじめて長方形ABCDの面積の半分になるのは出発してから8秒後

※ このとき右図のようになります。

直線PQは長方形ABCDの対角線の交点を通ります。

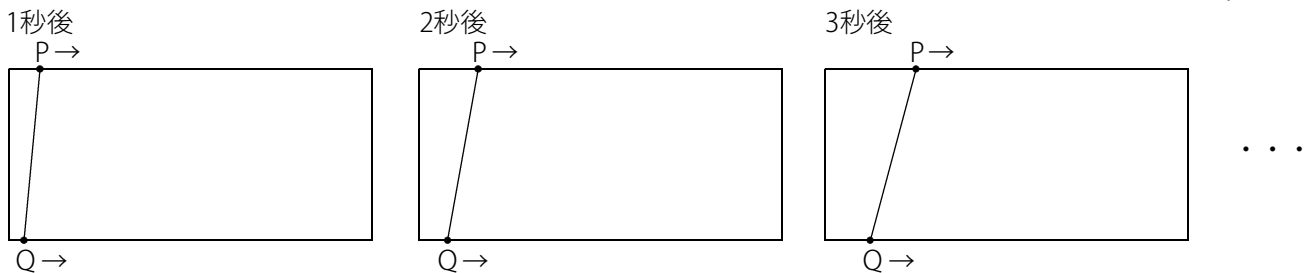
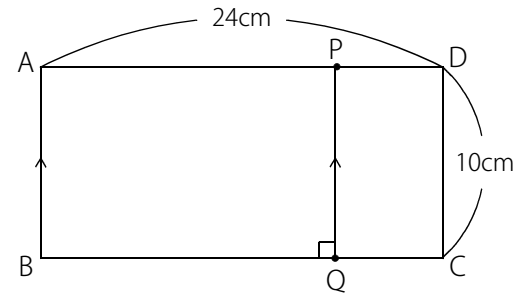




例題と解説

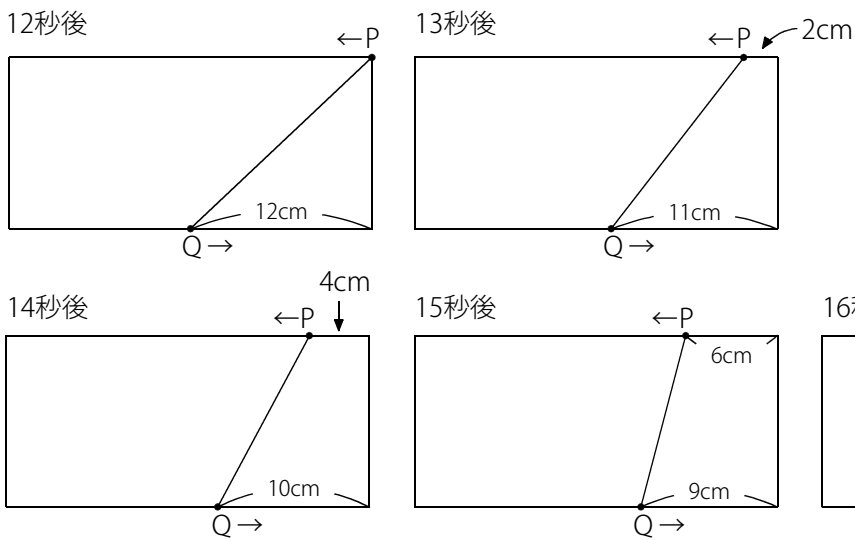
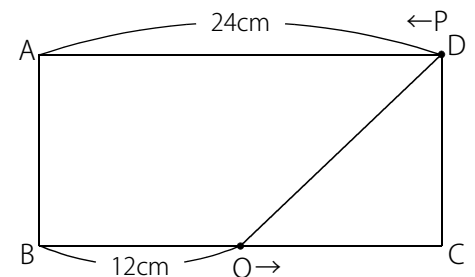
- (2) PQを結んでできる直線が辺ABと平行になるのは右図のようなときです。
このとき $AP=BQ$ となります。

1秒ずつ進めて調べます。



PとQの速さが異なるので、PがDに着いてもどってくるまで、PQとABが平行になることはありません。

PがDに着くのは $24 \div 2 = 12$ (秒後) なので右図のようになります。
ここから1秒ずつ進めて調べます。



上図より16秒後にPQを結んでできる直線がはじめて辺ABと平行になります。



例題と解説

(別解)

PがDに着いてから、その後に平行になるので、PをDまで進めます。

$24 \div 2 = 12$ (秒) よりPがDに着くのは出発してから12秒後です。

このとき右図1のようになっています。

図2のように同じ直線上にPQがあるとします。

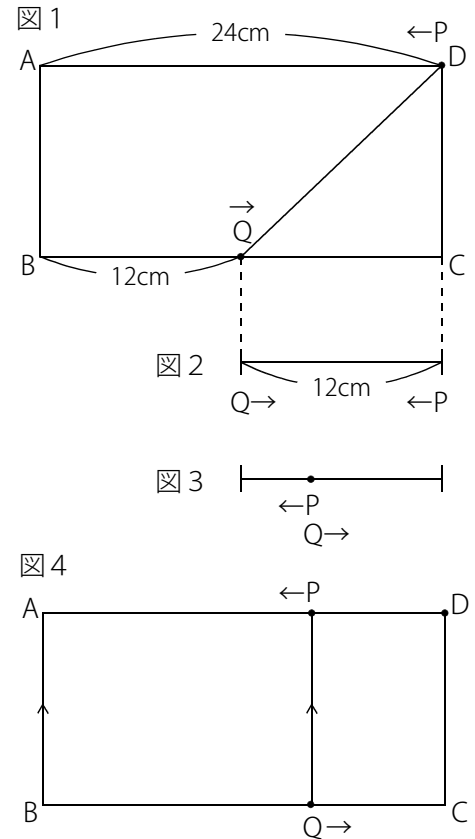
ここから図3のようにPとQが会ったときに、図4のように

ABとPQが平行になります。

図2で12cmはなれているので図2のときから $12 \div (2+1) = 4$ (秒後) に

ABとPQが平行になることがわかります。

よって出発してから $12+4=16$ (秒後) に平行になります。



※ AとBを同じ直線上で考えて「出会い」の旅人算のように解きます。



例題と解説

- (3) (2)でABとPQが平行になったときから、QがCに着くまで進めると図1のようになります。

このとき出発してから $24 \div 1 = 24$ (秒後) なので

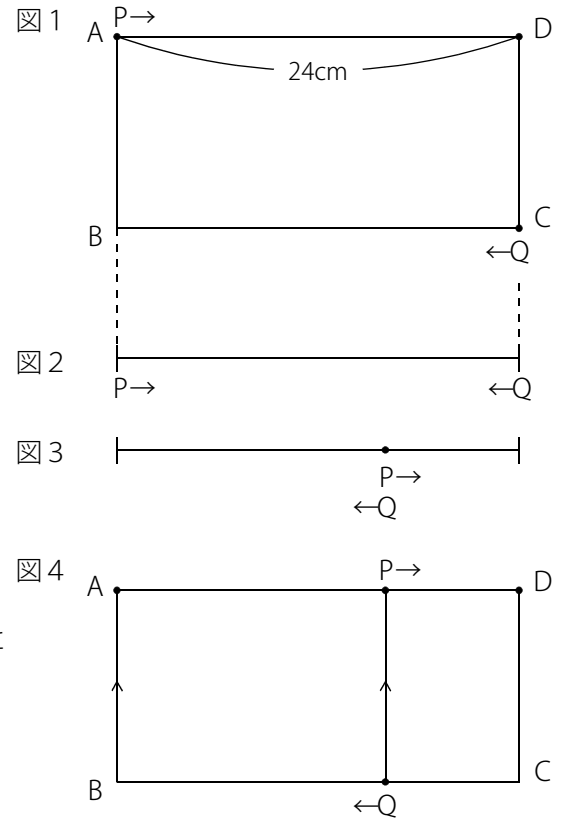
Pは $2 \times 24 = 48$ (cm) 進んでいるのでAにもどってきています。

図2のように同じ直線上にPQがあるとします。

これから図3のようにPとQが出会ったときに、図4のようにABとPQが平行になります。

図2で24cmはなれているので図2のときから $24 \div (2 + 1) = 8$ (秒後) にABとPQが平行になることがわかります。

よって出発してから $24 + 8 = 32$ (秒後) に2回目に平行になります。

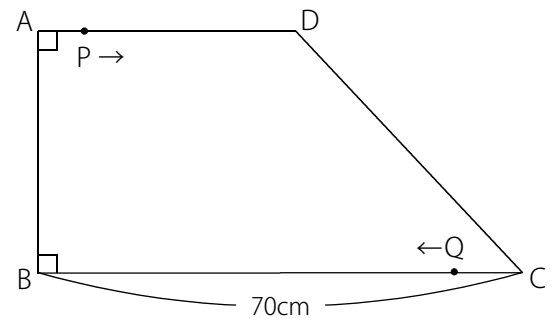




例題と解説

例題 3

右図のような台形ABCDがあります。点PはAを出発して秒速2cmで辺AD上を往復します。また点Qは点Pと同時にCを出発して秒速3cmで辺BC上を往復します。このとき次の問いに答えなさい。



- (1) $AD=40\text{cm}$ のときPQを結んでできる直線がはじめて辺ABと平行になるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) $AD=24\text{cm}$ のときPQを結んでできる直線がはじめて辺ABと平行になるのは出発してから何秒後ですか。
- (3) $AD=40\text{cm}$ のときPQを結んでできる直線がはじめて辺CDと平行になるのは出発してから何秒後ですか。
- (4) $AD=40\text{cm}$ のとき四角形ABQPの面積がはじめて台形ABCDの面積の半分になるのは出発してから何秒後ですか。

答え (1) 14秒後 (2) 22秒後 (3) 8秒後 (4) 15秒後

[例題 3 の解説]

- (1) ABとPQがはじめて平行になるのは右図1のようなときです。

図 1

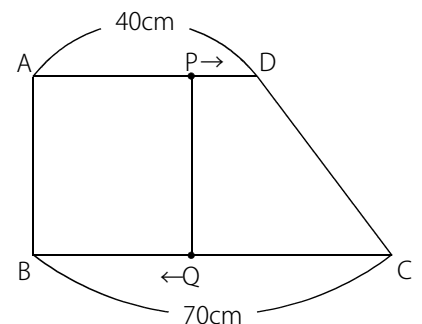
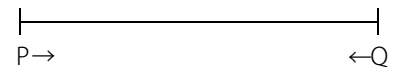


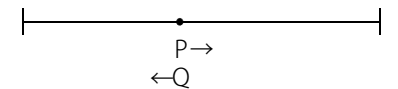
図2のようにPQを同じ直線上で考えると、ABとPQが平行になるのは図3のようにPQが出会ったときです。

図 2



よって $70 \div (2+3) = 14$ (秒後)

図 3





例題と解説

- (2) $AD=24\text{cm}$ のときはPQとABが平行になる前にPがDに着いてAにもどってきます。このとき図1のようになります。
これは出発してから $24 \div 2 = 12$ (秒後) です。

図2のようにPQを同じ直線上で考えると、ABとPQが平行になるのは図3のようにQがPに追いついたときです。

図2のときPはQよりも10cm前にいます。

Pは秒速2cm，Qは秒速3cmなので1秒で $3 - 2 = 1$ (cm) ずつ追いつきます。

よって図2のときから追いつくまでに $10 \div (3 - 2) = 10$ (秒) かかるので図4のように $AD=24\text{cm}$ のときABとPQが平行になるのは出発してから $12 + 10 = 22$ (秒後)

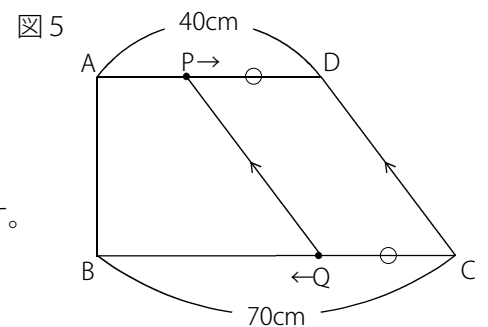
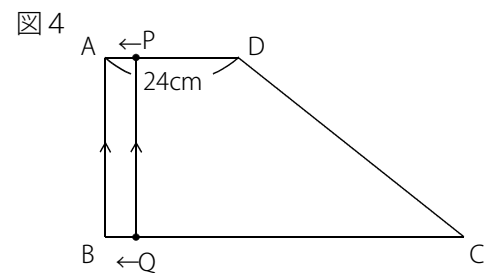
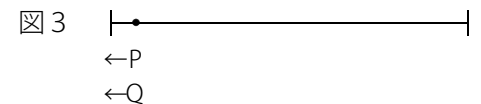
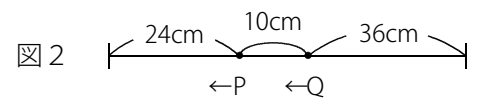
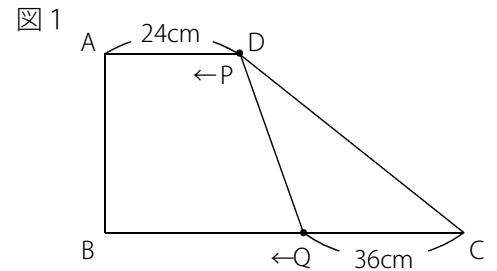
- (3) CDとPQがはじめて平行になるのは右図5のようなときです。
このとき四角形PQCDは平行四辺形になるので $PD=QC$ です。

出発してから図5のようになるまでにPが進んだ距離はAPです。

また、Qが進んだ距離はCQなので、PとQは合わせて $AP + CQ$ 進んでいます。

$CQ = DP$ なので $AP + CQ = AP + DP = AD = 40$ (cm)

PとQは1秒で合わせて $2 + 3 = 5$ (cm) 進むので $40 \div 5 = 8$ (秒後)



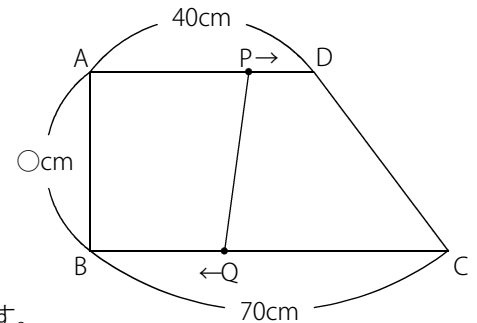


例題と解説

- (4) 台形ABCDの高さを○cmとすると $AD=40\text{cm}$ のとき台形ABCDの面積は $(40+70)\times\text{○}\div 2=55\times\text{○}$
よって台形ABCDの面積の半分は $55\times\text{○}\div 2=27.5\times\text{○}$

右図のように四角形ABQPは台形なので
 $(AP+BQ)\times\text{○}\div 2=27.5\times\text{○}$ となります。

※ 四角形ABQPが長方形や正方形になる場合もあります。
ただし長方形や正方形も台形の1つなので同じように考えることができます。



$(AP+BQ)\times\text{○}\div 2=27.5\times\text{○}$ の式の左右を○で割ると $(AP+BQ)\div 2=27.5$
よって $AP+BQ=27.5\times 2$ より $AP+BQ=55(\text{cm})$

※ 台形ABCDの上底と下底の和が110cmなので、半分の面積になるのは $AP+BQ=110\div 2=55(\text{cm})$ のときです。

$AP+BQ=55(\text{cm})$ になるときが出発の何秒後なのかを求めます。

0秒のとき $AP=0(\text{cm})$, $BQ=70(\text{cm})$ なので $AP+BQ=0+70=70(\text{cm})$

1秒のとき $AP=2(\text{cm})$, $BQ=67(\text{cm})$ なので $AP+BQ=2+67=69(\text{cm})$

2秒のとき $AP=4(\text{cm})$, $BQ=64(\text{cm})$ なので $AP+BQ=4+64=68(\text{cm})$

3秒のとき $AP=6(\text{cm})$, $BQ=61(\text{cm})$ なので $AP+BQ=6+61=67(\text{cm})$

...

1秒でAPは2cm長くなり、BQは3cm短くなるので合計の $AP+BQ$ は1秒で $3-2=1(\text{cm})$ ずつ短くなります。
はじめ $AP+BQ=70(\text{cm})$ で $AP+BQ=55(\text{cm})$ になればいいので $70-55=15(\text{cm})$ 短くなっています。

よって $AP+BQ=55(\text{cm})$ になるのは出発してから $15\div 1=15(\text{秒後})$

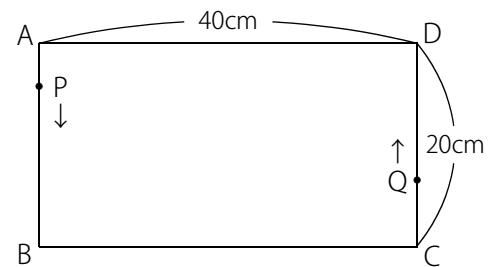
四角形ABQPの面積がはじめて台形ABCDの面積の半分になるのは出発してから15秒後です。



例題と解説

例題4

右図のような長方形ABCDがあります。点PはAを、点QはCを同時に出発し、点Pは秒速5cm、点Qは秒速2cmで矢印の方向に長方形の辺上を回ります。このとき次の問いに答えなさい。



- (1) 点Pと点Qがはじめて同じ辺上にくるのは出発してから何秒後ですか。
 - (2) 点Pが点Qにはじめて追いつくのは出発してから何秒後ですか。
 - (3) PQを結んでできる直線がはじめてABと垂直になるのは出発してから何秒後ですか。
 - (4) PQを結んでできる直線がはじめてABと平行になるのは出発してから何秒後ですか。
- またそのときの4点ABPQを結んでできる四角形の面積は何 cm^2 ですか。

答え (1) 16秒後 (2) 20秒後 (3) $2\frac{6}{7}$ 秒後 (4) $11\frac{3}{7}$ 秒後, $742\frac{6}{7}\text{cm}^2$

[例題4の解説]

- (1) Pは秒速5cm, Qは秒速2cmなのでPがQを追いかけるように辺上を回ります。

Pをそれぞれの頂点まで進めて、そのときにQが同じ辺上にあるかどうかを調べます。

PがBに着いたときは、明らかにQは同じ辺上にはありません。

PがCに着いたときは $(20+40)\div 5=12$ (秒後) でそのときQは $2\times 12=24$ (cm) 進んでいます。

このときQはAD上にいるので、PとQは同じ辺上にはありません。

PがDに着いたときは $(20+40+20)\div 5=16$ (秒後) でそのときQは $2\times 16=32$ (cm) 進んでいます。

このときQはAD上にいるので、PとQは同じ辺上にあります。

よってPとQがはじめて同じ辺上にくるのは出発してから16秒後です。



例題と解説

- (2) はじめPとQは図1のようになっています。
このとき $20+40=60(\text{cm})$ はなれています。

※ 図2のように直線に直して考えるとわかりやすくなります。

1秒でPはQに $5-2=3(\text{cm})$ ずつ追いつきます。
60cm追いつけばいいので $60 \div 3=20(\text{秒後})$ に
PはQに追いつきます。

図1

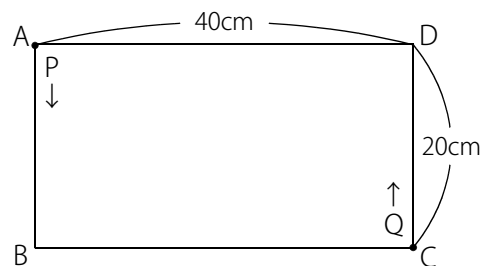
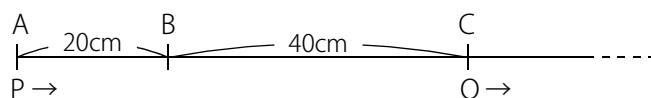


図2

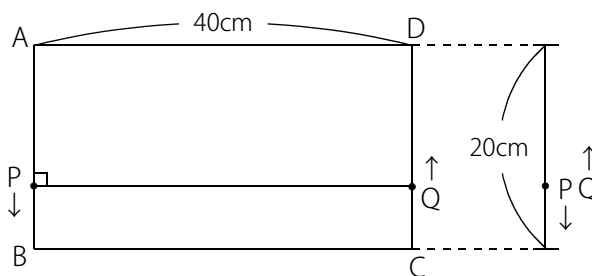


- (3) ABとPQがはじめて垂直になるのは図3のようなときです。

PとQを同じ直線上で考えると、ABとPQが垂直になるのは
図3のようにPQが出会うときです。

よって $20 \div (5+2)=2\frac{6}{7}(\text{秒後})$

図3





例題と解説

(4) ABとPQがはじめて平行になるのは図4のようなときです。

まずQをDまで進めて考えます。

QがDに着くのは $20 \div 2 = 10$ (秒後)

このときPは $5 \times 10 = 50$ (cm) 進んでいるので図5のようになります。

同じ直線上で考えるとPとQは10cmはなれていて、図4のように

平行になるのはPとQが出会うときなので $10 \div (5 + 2) = 1\frac{3}{7}$ (秒後)

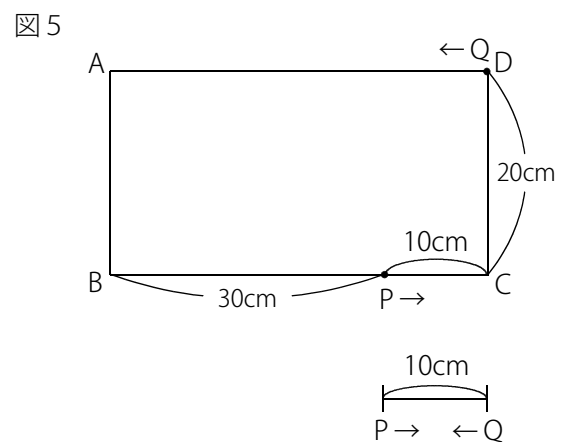
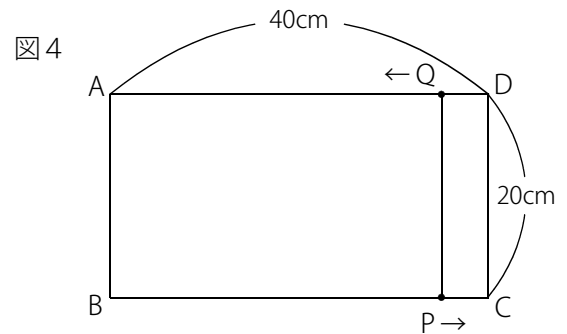
よってABとPQがはじめて平行になるのは出発してから

$$10 + 1\frac{3}{7} = 11\frac{3}{7}(\text{秒後})$$

このとき $AQ = 40 - 2 \times 1\frac{3}{7} = \frac{260}{7}$ (cm) なので

$$(\text{四角形ABPQの面積}) = 20 \times \frac{260}{7} = \frac{5200}{7} = 742\frac{6}{7}(\text{cm}^2)$$

※ 移動する2点PQを結んでできる直線が、ある辺と平行や垂直になるときを調べる場合は
2点その状態になる前にどの頂点にいるのかを調べておくことが大切です。





ポイントまとめ

- ・ 2点の「出会い」では旅人算と同様に「速さの和」を利用します。
- ・ 2点の「追いつき」では旅人算と同様に「速さの差」を利用します。
- ・ 面積を求める方法は「直接求める」,「全体からいらない部分を引いて求める」の2通りあります。
- ・ 移動する2点PQを結んでできる直線が、ある辺と平行や垂直になるときを調べる場合は
2点がその状態になる前にどの頂点にいるのかを調べておくことが大切です。