中学受験Unit.1- 1　5年　小数と分数
工夫する分数の計算

例題と解説

例題１

次の計算をしなさい。

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

答え $\frac{3}{4}$

[例題１の解説]

通分をして求めます。

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

(別解)

次のように分数の形を変えます。

$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

これらを用いると $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$ となります。

(　)を外すと $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}$と$\frac{1}{2}$で合わせて0になります。また$-\frac{1}{3}$と$\frac{1}{3}$で合わせて0になります。

よって $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(C) 2014 min-san.com

例題と解説

例題２

次の計算をしなさい。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$$

答え $\frac{8}{9}$

[例題２の解説]

通分して計算するのでは時間がかかってしまいます。

工夫して計算しましょう。

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{20}=\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\ ,\ \frac{1}{30}=\frac{1}{5\times6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{42}=\frac{1}{6\times7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\ ,\ \frac{1}{56}=\frac{1}{7\times8}=\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\ ,\ \frac{1}{72}=\frac{1}{8\times9}=\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$$

これらを用いると

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{9}\right)$$

※上のようにあいだが合わせて0になります。よって残りは先頭の $\frac{1}{1}$ と最後の $-\frac{1}{9}$ なので次のようになります。

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{9}$$

$$=\frac{8}{9}$$

(C) 2014 min-san.com

例題と解説

例題３

次の計算をしなさい。

$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$

答え $\frac{3}{7}$

[例題３の解説]

通分をして求めます。

3と15と35の最小公倍数は105です。

$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}=\frac{35}{105}+\frac{7}{105}+\frac{3}{105}=\frac{45}{105}=\frac{3}{7}$

(別解)

次のように分数の形を変えます。

$\frac{1}{3}=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$ ← $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ なので $\frac{1}{3}$ にするために $\frac{1}{2}$ をかけます。

$\frac{1}{15}=\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$ ← $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ なので $\frac{1}{15}$ にするために $\frac{1}{2}$ をかけます。

$\frac{1}{35}=\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$ ← $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$ なので $\frac{1}{35}$ にするために $\frac{1}{2}$ をかけます。

これらを用いると

$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

$\frac{1}{2}$でまとめます。

(C) 2014 min-san.com

$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{7}\right)\right\}$$

※上のようにあいだが合わせて0になります。よって残りは先頭の $\frac{1}{1}$ と最後の $-\frac{1}{7}$ なので次のようになります。

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}$$

$$=\frac{3}{7}$$

※ $\frac{1}{2}$ をかけるのを忘れないようにしましょう。問題によっては$\frac{1}{3}$や$\frac{1}{4}$をかける場合もあります。

(C) 2014 min-san.com

例題と解説

例題４

次の計算をしなさい。

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\frac{1}{130}+\frac{1}{208}$$

答え $\frac{5}{16}$

[例題４の解説]

工夫して計算しましょう。

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{1\times4}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{28}=\frac{1}{4\times7}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)$$

…

$$\frac{1}{208}=\frac{1}{13\times16}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{16}\right)$$

※ 全部書かなくても分母は (1 , 4)　(4 , 7)　(7 , 10)　(10 , 13)　(13 , 16) であることがわかります。

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\frac{1}{130}+\frac{1}{208}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{16}\right)$$ ← あいだは合わせて0になります。

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{16}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{15}{16}$$

$$=\frac{5}{16}$$

※ 慣れてくれば暗算で解けるようになります。

(C) 2014 min-san.com

例題と解説

例題５

次の計算をしなさい。

$$\frac{11}{2\times5}+\frac{41}{5\times8}+\frac{89}{8\times11}+\frac{155}{11\times14}$$

答え　$4\frac{1}{7}$

[例題５の解説]

帯分数に直してから、工夫して計算します。

$$\frac{11}{2\times5}+\frac{41}{5\times8}+\frac{89}{8\times11}+\frac{155}{11\times14}$$

$$=\frac{11}{10}+\frac{41}{40}+\frac{89}{88}+\frac{155}{154}$$

$$=1\frac{1}{10}+1\frac{1}{40}+1\frac{1}{88}+1\frac{1}{154}$$

$$=4+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+\frac{1}{154}$$

$$=4+\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\frac{1}{11\times14}$$

$$=4+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{14}\right)$$ ← あいだは合わせて0になります。

$$=4+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{14}\right)$$

$$=4+\frac{1}{3}\times\frac{6}{14}$$

$$=4\frac{1}{7}$$

(C) 2014 min-san.com

例題と解説

例題６

次の計算をしなさい。

$$\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\frac{1}{7\times9\times11}$$

答え　$\frac{8}{99}$

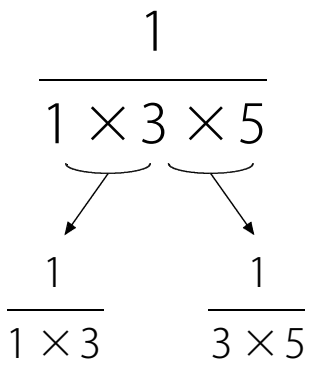
[例題６の解説]

工夫して計算しましょう。

$$\frac{1}{1\times3\times5}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)$$

これは右図のように分母の前の2つと後の2つで分けています。

そして$\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}=\frac{4}{15}$ なので$\frac{1}{15}$にするために$\frac{1}{4}$をかけます。



同じように

$$\frac{1}{3\times5\times7}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)$$

$$\frac{1}{5\times7\times9}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{5\times7}-\frac{1}{7\times9}\right)$$

$$\frac{1}{7\times9\times11}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{7\times9}-\frac{1}{9\times11}\right)$$

$$\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\frac{1}{7\times9\times11}$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{5\times7}-\frac{1}{7\times9}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{7\times9}-\frac{1}{9\times11}\right)$$

(C) 2014 min-san.com

例題と解説

$\frac{1}{4}$でまとめます。

$$=\frac{1}{4}\times\left\{\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)+\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)+\left(\frac{1}{5\times7}-\frac{1}{7\times9}\right)+\left(\frac{1}{7\times9}-\frac{1}{9\times11}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times\left\{\left(\frac{1}{1\times3}-\cancel{\frac{1}{3\times5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3\times5}}-\cancel{\frac{1}{5\times7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5\times7}}-\cancel{\frac{1}{7\times9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7\times9}}-\frac{1}{9\times11}\right)\right\}$$

※上のようにあいだが合わせて0になります。よって残りは先頭の $\frac{1}{1\times3}$ と最後の $-\frac{1}{9\times11}$ なので次のようになります。

$$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{9\times11}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{32}{99}$$

$$=\frac{8}{99}$$

ポイントまとめ

- $\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$
- $\frac{1}{4}=\frac{1}{1\times4}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)$
- $\frac{1}{1\times3\times5}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)$

(C) 2014 min-san.com