中学受験Unit.29- 1　4年　場合の数３
順列と計算

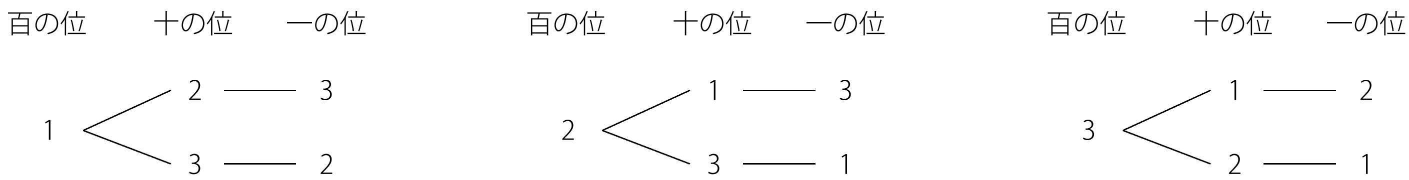
例題と解説

例題１

1 ，2 ，3 のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で3枚あります。
この3枚のカードをならべかえて3けたの整数を作ります。3けたの整数は全部で何通りできますか。

答え 6通り

[例題１の解説]
樹形図で表すと下図のようになります。



よって6通りであることがわかります。

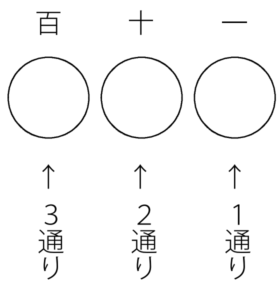
これを計算で求めます。
3けたなので百の位と十の位と一の位にそれぞれ数を１つずつ選んでいきます。

百の位　…　3枚から1枚を選ぶので3通り

十の位　…　残りの2枚から1枚を選ぶので2通り

一の位　…　残りの1枚から1枚を選ぶので1通り

よって 3×2×1＝6(通り)



百の位は3枚から１枚選ぶので３通り
十の位は残りの２枚から１枚選ぶので２通り
一の位は残りの１枚なので１通り

例題と解説

このように異なる3つのものをならべかえる場合は 3×2×1 となります。

これを「P（パーミュテーション)」という記号を使って $_3P_3$ と書き「サン ピー サン」と読みます。
$_AP_B$ のときAが異なるものの個数でBがその中からならべかえるものの個数です。
AからはじめてB個分だけ数を１つずつ小さくしてかけます。

（例）　異なる３つのものをならべかえる場合

$_3P_3=3\times2\times1=6$(通り)

異なる４つのものをならべかえる場合

$_4P_4=4\times3\times2\times1=24$(通り)

異なる５つのものをならべかえる場合

$_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=120$(通り)

異なる３つのもののうち２つをならべかえる場合

$_3P_2=3\times2=6$(通り)

異なる５つのもののうち３つをならべかえる場合

$_5P_3=5\times4\times3=60$(通り)

パーミュテーションを覚(おぼ)えておけばならべかえる（順列(じゅんれつ)）の問題でどのような計算をすればよいかがわかりやすくなります。

例題と解説

例題２

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で4枚あります。
これらのカードをならべかえて整数を作ります。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　4枚のカードをならべかえて4けたの整数を作ります。全部で何通りできますか。

（２）　3枚のカードをならべかえて3けたの整数を作ります。全部で何通りできますか。

答え　（１）24通り（２）24通り

[例題２の解説]

（１）　計算で求めます。

4けたなので千の位と百の位と十の位と一の位にそれぞれ数を１つずつ選んでいきます。

千の位　…　4枚から1枚を選ぶので4通り

百の位　…　残りの3枚から1枚を選ぶので3通り

十の位　…　残りの2枚から1枚を選ぶので2通り

一の位　…　残りの1枚から1枚を選ぶので1通り

よって $4\times3\times2\times1=24$(通り)

パーミュテーションで表せば ${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$(通り) となります。

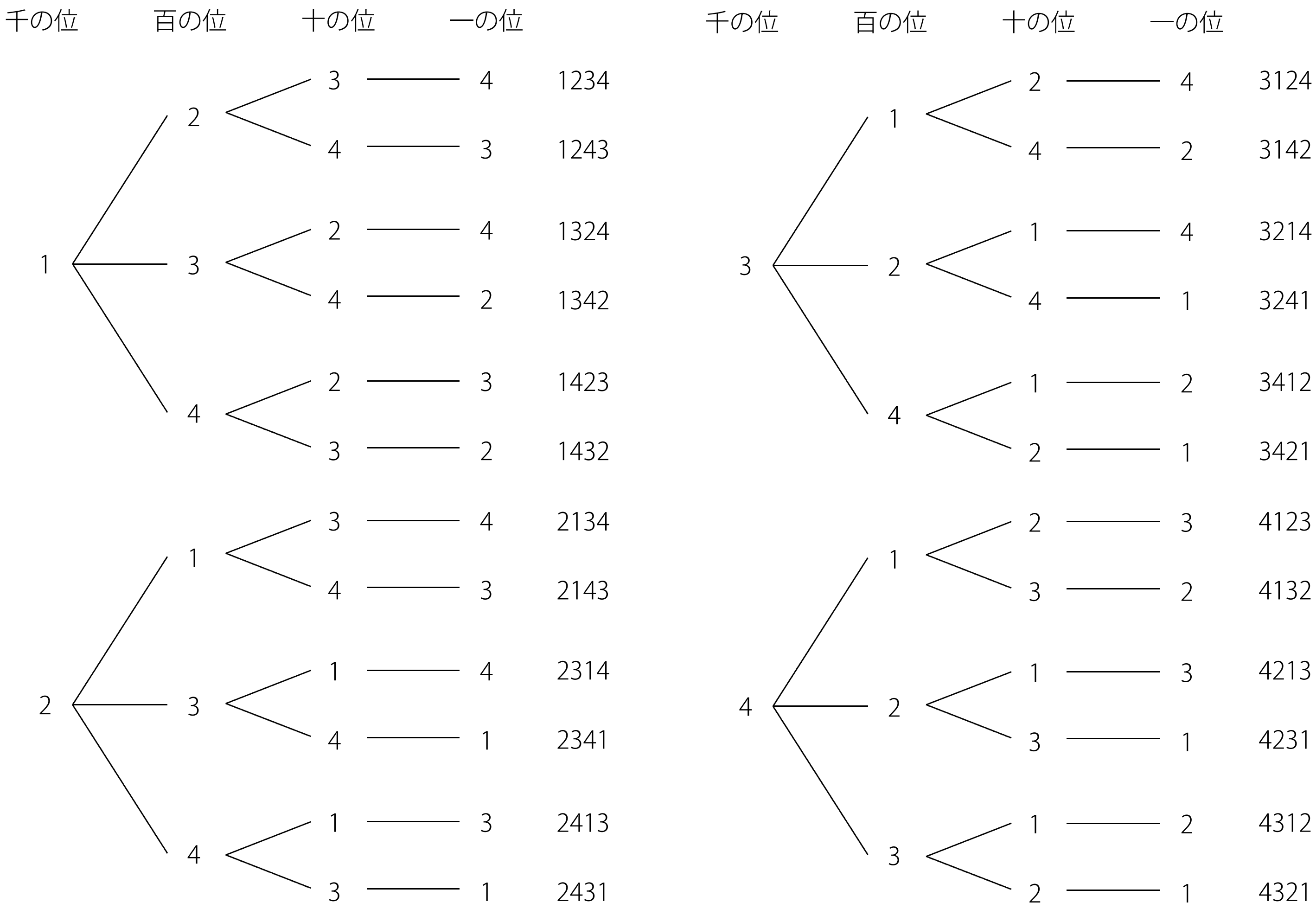
書き出して確認しておきます。

1234，1243，1324，1342，1423，1432，2134，2143，2314，2341，2413，2431
3124，3142，3214，3241，3412，3421，4123，4132，4213，4231，4312，4321

例題と解説

(別解)

樹形図は下図のようになり、24通りであることがわかります。



（2）　計算で求めます。

3けたなので百の位と十の位と一の位にそれぞれ数を１つずつ選んでいきます。

百の位　…　4枚から1枚を選ぶので4通り

十の位　…　残りの3枚から1枚を選ぶので3通り

一の位　…　残りの2枚から1枚を選ぶので2通り

よって 4×3×2＝24(通り)

パーミュテーションで表せば ${}_4P_3$＝4×3×2＝24(通り) となります。

書き出して確認しておきます。

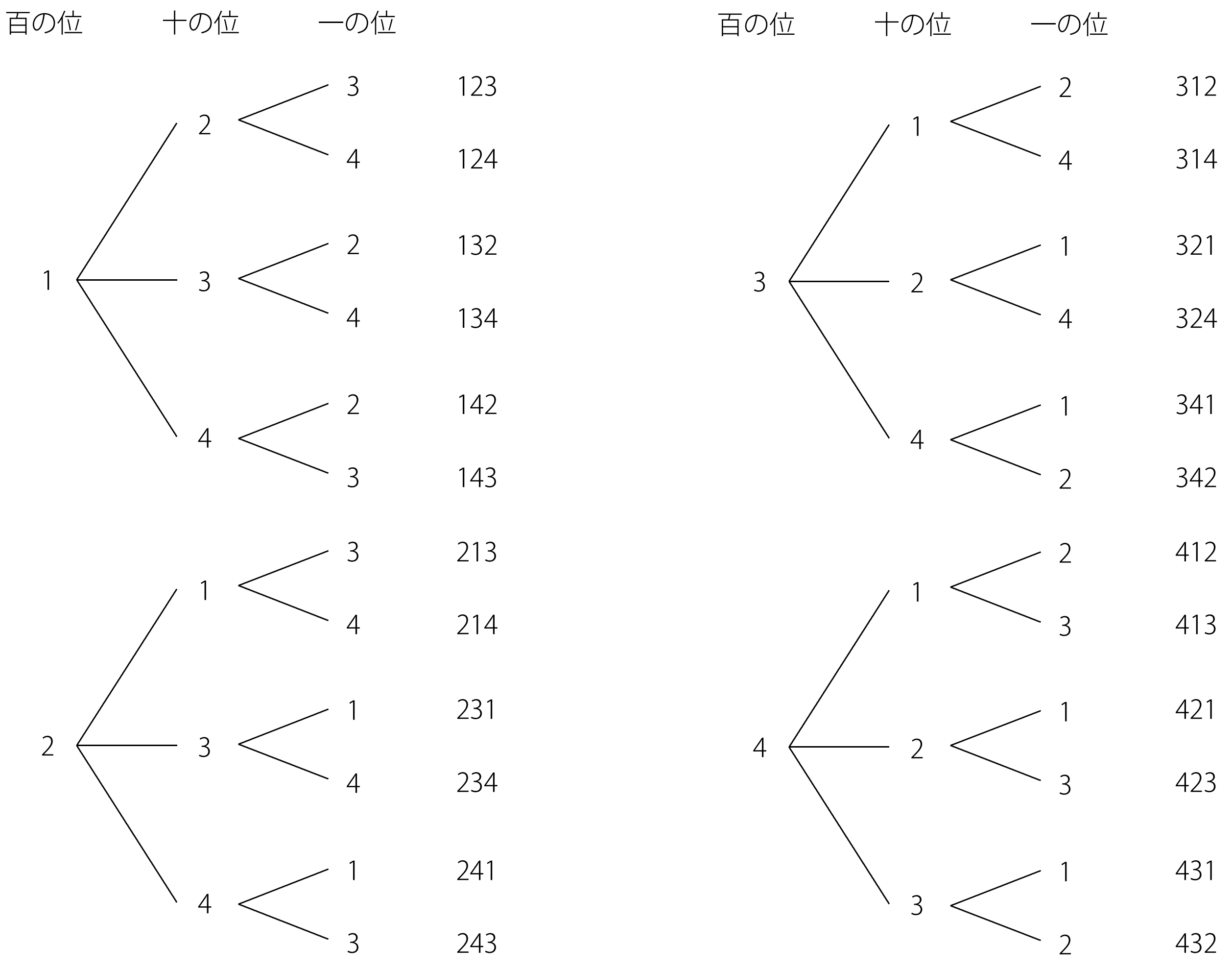
123，124，132，134，142，143，213，214，231，234，241，243

312，314，321，324，341，342，412，413，421，423，431，432

例題と解説

(別解)

樹形図は下図のようになり、24通りであることがわかります。



例題と解説

例題３

$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で4枚あります。
これらのカードをならべかえて整数を作ります。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　4枚のカードをならべかえて4けたの整数を作ります。全部で何通りできますか。

（２）　2枚のカードをならべかえて2けたの整数を作ります。全部で何通りできますか。

答え　（１）18通り（２）9通り

[例題３の解説]

（１）　計算で求めます。

4けたなので千の位と百の位と十の位と一の位にそれぞれ数を１つずつ選んでいきます。

ただし$\boxed{0}$は千の位に使うことができません。

千の位　…　0以外の3枚から1枚を選ぶので3通り

百の位　…　残りの3枚から1枚を選ぶので3通り　　←　0が使えるので3枚

十の位　…　残りの2枚から1枚を選ぶので2通り

一の位　…　残りの1枚から1枚を選ぶので1通り

よって　3×3×2×1＝18(通り)

書き出して確認しておきます。

1023，1032，1203，1230，1302，1320

2013，2031，2103，2130，2301，2310

3012，3021，3102，3120，3201，3210

（2）　計算で求めます。

2けたなので十の位と一の位にそれぞれ数を１つずつ選んでいきます。

ただし $\boxed{0}$ は十の位に使うことができません。

十の位　…　0以外の3枚から1枚を選ぶので3通り

一の位　…　残りの3枚から1枚を選ぶので3通り　　← 0が使えるので3枚

よって 3×3＝9(通り)

書き出して確認しておきます。

10，12，13，20，21，23，30，31，32

例題と解説

例題４

A，B，C，D，E の5人がいてリレーの走る順番を決めます。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　5人全員がリレーに出る場合の走る順番は全部で何通りありますか。

（２）　5人のうち4人がリレーに出る場合の走る順番は全部で何通りありますか。

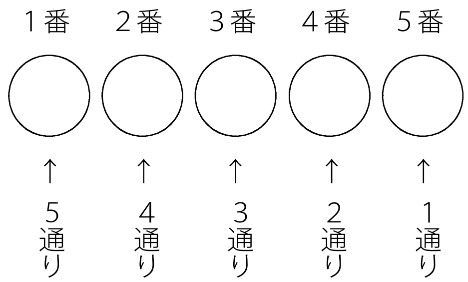
（３）　5人のうち3人がリレーに出る場合の走る順番は全部で何通りありますか。

（４）　5人のうち2人がリレーに出る場合の走る順番は全部で何通りありますか。

<u>答え　（１）120通り（２）120通り（３）60通り（４）20通り</u>

[例題４の解説]

（１）　5人のならびかえです。



１番に走る人　…　5人から1人を選ぶので5通り

２番に走る人　…　残りの4人から1人を選ぶので4通り

３番に走る人　…　残りの3人から1人を選ぶので3通り

４番に走る人　…　残りの2人から1人を選ぶので2通り

５番に走る人　…　残りの1人から1人を選ぶので1通り

よって 5×4×3×2×1＝120(通り)

パーミュテーションで表せば ${}_5P_5$＝5×4×3×2×1＝120(通り) となります。

※ 120通りとなると樹形図で表すのは大変です。計算で求められるようにしておきましょう。

(別解)

仮にAが１番に走る場合、残りの４人をならべかえればよいので樹形図より24通りあることがわかります。
１番に走る人は Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ の5通りなので　24×5＝120(通り) と求めることもできます。

（２）　5人のうち4人のならびかえです。

１番に走る人　…　5人から1人を選ぶので5通り
２番に走る人　…　残りの4人から1人を選ぶので4通り
３番に走る人　…　残りの3人から1人を選ぶので3通り
４番に走る人　…　残りの2人から1人を選ぶので2通り
よって 5×4×3×2＝120(通り)

パーミュテーションで表せば $_5P_4$＝5×4×3×2×1＝120(通り) となります。

（３）　5人のうち3人のならびかえです。

１番に走る人　…　5人から1人を選ぶので5通り
２番に走る人　…　残りの4人から1人を選ぶので4通り
３番に走る人　…　残りの3人から1人を選ぶので3通り
よって 5×4×3＝60(通り)

パーミュテーションで表せば $_5P_3$＝5×4×3＝60(通り) となります。

例題と解説

（４）　5人のうち2人のならびかえです。

１番に走る人　…　5人から1人を選ぶので5通り

２番に走る人　…　残りの4人から1人を選ぶので4通り

よって 5×4＝20(通り)

パーミュテーションで表せば $_5P_2=5\times4=20$(通り) となります。

リレーではありませんが、例えば5人のうち1人だけリレーに出る場合は5人のうち1人のならびかえです。

1番に走る人　…　5人から1人を選ぶので5通り

パーミュテーションで表せば $_5P_1=5=5$(通り) となります。

パーミュテーションを使えば樹形図を書かなくても求めることができますが、順列の基本は樹形図であることを忘れないで下さい。難しい問題ほど樹形図で整理することが大切になってきます。
何も考えずに式で解こうとするのではなく、使えるときを見極めて使うようにしましょう。

例題と解説

例題５

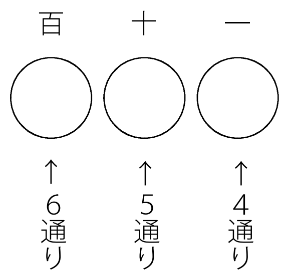
$\boxed{1}$ ，$\boxed{2}$ ，$\boxed{3}$ ，$\boxed{4}$ ，$\boxed{5}$ ，$\boxed{6}$ のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で6枚あります。
この6枚のカードから3枚を選んで3けたの整数を作ります。3けたの整数は全部で何通りできますか。

答え 120通り

[例題５の解説]

「6枚のカードから3枚を選んで」とありますが、これまでの問題と考え方は同じです。
異なる6枚のうち3枚をならびかえるだけです。

異なる６枚から３枚をならびかえるので右図のようになります。



百の位　…　6枚から1枚を選ぶので6通り
十の位　…　残りの5枚から1枚を選ぶので5通り
一の位　…　残りの4枚から1枚を選ぶので4通り

よって 6×5×4＝120(通り)

パーミュテーションで表せば ${}_6P_3$＝6×5×4＝120(通り) となります。

このようにパーミュテーションは「選んでならびかえる」という場合の数を一度で求めることができます。

※A，B，C，D，E の5人のうち3人がリレーに出る場合の走る順番を求める場合であれば ${}_5P_3$＝5×4×3＝60(通り)

例題と解説

例題６

Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ の７人が横一列（よこいちれつ）にならびます。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　AとBが両はしにくるならび方は全部で何通りありますか。

（２）　AとBがとなり合うならび方は全部で何通りありますか。

答え　（１）240通り（２）1440通り

[例題６の解説]

（１）　図１のようにAが左はしに、Bが右はしにくる場合を考えます。

このとき残り5人のならび方が何通りあるかを求めればよいので

${}_5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$(通り)

図１

A	○	○	○	○	○	B
	↑	↑	↑	↑	↑	
	5通り	4通り	3通り	2通り	1通り	

次に図２のようにAが右はしに、Bが左はしにくる場合を考えます。

このときも同じように5人のならび方を考えればよいので

${}_5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$(通り)

よって　$120 \times 2 = 240$(通り)

図２

B	○	○	○	○	○	A
	↑	↑	↑	↑	↑	
	5通り	4通り	3通り	2通り	1通り	

例題と解説

（２）　左にA、右にBというふうにとなり合う場合は

図１のようにそれぞれ$_5P_5$＝120通りあるので
120×6＝720(通り)

左にB、右にAというふうにとなり合う場合は

図２のようにそれぞれ$_5P_5$＝120通りあるので
120×6＝720(通り)

よって 720×2＝1440(通り)

図１

A B ○ ○ ○ ○ ○ ← 120通り
○ A B ○ ○ ○ ○ ← 120通り
○ ○ A B ○ ○ ○ ← 120通り
○ ○ ○ A B ○ ○ ← 120通り
○ ○ ○ ○ A B ○ ← 120通り
○ ○ ○ ○ ○ A B ← 120通り

図２

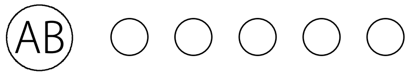
B A ○ ○ ○ ○ ○ ← 120通り
○ B A ○ ○ ○ ○ ← 120通り
○ ○ B A ○ ○ ○ ← 120通り
○ ○ ○ B A ○ ○ ← 120通り
○ ○ ○ ○ B A ○ ← 120通り
○ ○ ○ ○ ○ B A ← 120通り

例題と解説

(別解)

右図のようにABをまとめて1人と考えます。

つまりこのとき全部で6人と考えてこの6人をならびかえます。



${}_6P_6=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$(通り)

またBAをまとめて1人と考えた場合も同じように720通りなので

$720\times2=1440$(通り)

ポイントまとめ

・異なる3つのものをならべかえる場合は ${}_3P_3=3\times2\times1$

・${}_AP_B$ のときAが異なるものの個数でBがその中からならべかえるものの個数です。

　Aからはじめて B個分だけ数を１つずつ小さくしてかけます。

・記号Ｐをパーミュテーションといいます。

・何も考えずに式で解こうとするのではなく、式が使えるときを見極(みきわ)めて使うようにしましょう。