



例題と解説

例題 1

次の問いに答えなさい。

- (1) ある整数Aを7で割ると商が8で余りが3でした。Aを求めなさい。
- (2) 22で割ると3余る整数のうち、1000に最も近い数を求めなさい。

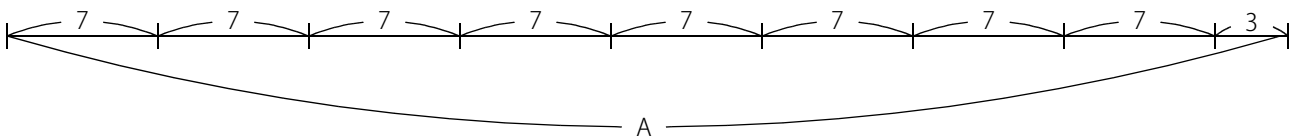
答え (1) 59 (2) 993

[例題 1 の解説]

- (1) 式に直すと次のようになります。

$$A \div 7 = 8 \text{ あまり } 3$$

下の線分図のようにAは7が8個と3でできているので $A = 7 \times 8 + 3 = 59$



- (2) 22で割ると3余る整数を小さい順に書き出すと 3, 25, 47, 69, 91, 113, ... となります。

※ $3 \div 22 = 0 \text{ あまり } 3$ となるので3を忘れないようにしましょう。

22で割ると3余る整数は3に22の倍数を足した数になっています。

$$1000 \div 22 = 45 \text{ あまり } 10 \quad \text{より22の倍数で1000に近い数は } 22 \times 45 = 990 \text{ と } 22 \times 46 = 1012$$

$$\text{これらに3を足して1000に最も近いのは } 990 + 3 = 993$$

よって22で割ると3余る整数のうち、1000に最も近い数は993



例題 2

次の問いに答えなさい。

- (1) 100を割ると4余り、150を割ると6余る整数をすべて求めなさい。
- (2) 4で割ると1余り、5で割ると3余る2桁の整数で最も大きい数を求めなさい。
- (3) 5で割ると1余り、7で割ると2余り、13で割ると7余る整数のうち、2000に最も近い数を求めなさい。
- (4) 5で割ると2余り、6で割ると3余り、7で割ると4余る整数のうち、2000に最も近い数を求めなさい。

答え (1) 8, 12, 16, 24, 48 (2) 93 (3) 1801 (4) 2097

[例題 2 の解説]

- (1) 100を割ると4余り、150を割ると6余る整数をAとします。またそれぞれの商を(商)とします。

$100 \div A = (\text{商}) \text{あまり} 4$, $150 \div A = (\text{商}) \text{あまり} 6$ となるので

それぞれ余りを引いた $100 - 4 = 96$, $150 - 6 = 144$ はAで割り切れる(Aの倍数)であることがわかります。

また、6余っているので**Aは6より大きな数**です。

つまりAは96と144の公約数のうち6より大きな数であることがわかります。

公約数は最大公約数の約数なので96と144の最大公約数を求めると48

48の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

このうち6より大きな数なのでAは 8, 12, 16, 24, 48

- (2) 4で割ると1余り、5で割ると3余る整数をAとします。

まず初めに最も小さいAを探します。

4で割ると1余る数 1, 5, 9, 13, 17, 21, ...

5で割ると3余る数 3, 8, 13, 18, 23, ...

よって最小のAは13

Aは13に4と5の公倍数を足した数なので、13に最小公倍数の20を足していくと 13, 33, 53, 73, 93, 113, ...

よって2桁の整数で最も大きい数は 93



- (3) 5で割ると1余り、7で割ると2余り、13で割ると7余る整数をAとします。

まず初めに最も小さいAを探しますが、3つ以上の場合はなかなか見つからない場合があるので
大きい2つの数「7で割ると2余る数」と「13で割ると7余る数」で共通する最小の数を探します。

7で割ると2余る数 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65, 72, ...

13で割ると7余る数 7, 20, 33, 46, 59, 72, ...

7で割ると2余り、13で割ると7余る整数で最も小さい数は72なので

7で割ると2余り、13で割ると7余る整数は72に7と13の公倍数を足した数になります。

7と13の最小公倍数は $7 \times 13 = 91$ なので

7で割ると2余り、13で割ると7余る整数 72, 163, 254, 345, 436, 527, ...

このうち5で割ると1余る最も小さい数を探します。

5で割ると1余る数の一の位は1か6なので、あてはまるのは436です。

よってAは436に5と7と13の公倍数を足した数であることがわかります。

5と7と13の最小公倍数は $5 \times 7 \times 13 = 455$ なので

Aは 436, 891, 1346, 1801, 2256, ...

よって2000に最も近いAは1801

- (4) 5で割ると2余り、6で割ると3余り、7で割ると4余る整数をAとします。

(3)と同様の求め方でもかまいませんが、ここでは割る数と余りの差が $5-2=3$, $6-3=3$, $7-4=3$ のように
すべて等しくなっていることに着目します。

このとき仮にAがあと3大きければ、5でも6でも7でも割り切れるので $A+3$ は5と6と7の公倍数です。

5と6と7の公倍数 210, 420, 630, 840, ...

$2000 \div 210 = 9$ あまり110 より2000に近い210の倍数は $210 \times 9 = 1890$, $210 \times 10 = 2100$

これらから3を引いて2000に最も近いのは $2100 - 3 = 2097$



例題と解説

例題 3

ある整数 A があります。105を A で割っても、139を A で割っても、190を A で割ってもすべて余りが等しくなります。 A を求めなさい。

答え 17

[例題 3 の解説]

余りを○として式で整理します。それぞれの商を P , Q , R とします。

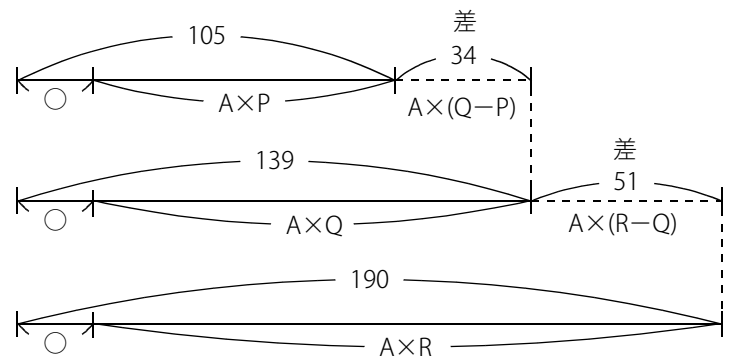
$$105 \div A = P \text{ あまり } \bigcirc \rightarrow A \times P + \bigcirc = 105 \rightarrow A \times P = 105 - \bigcirc$$

$$139 \div A = Q \text{ あまり } \bigcirc \rightarrow A \times Q + \bigcirc = 139 \rightarrow A \times Q = 139 - \bigcirc$$

$$190 \div A = R \text{ あまり } \bigcirc \rightarrow A \times R + \bigcirc = 190 \rightarrow A \times R = 190 - \bigcirc$$

これらより $105 - \bigcirc$, $139 - \bigcirc$, $190 - \bigcirc$ はすべて A で割り切れる(A の倍数)であることがわかります。

これらの関係を線分図で表すと右図のようになります。



差に着目すると

$$A \times Q - A \times P = 139 - 105 = 34 \rightarrow A \times (Q - P) = 34$$

$$A \times R - A \times Q = 190 - 139 = 51 \rightarrow A \times (R - Q) = 51$$

$A \times (Q - P) = 34$, $A \times (R - Q) = 51$ なので34と51はともに A の倍数になっていることがわかります。

つまり A は34と51の公約数のうち1以外の数です。

34と51の最大公約数は17なので公約数は 1 , 17

よって $A = 17$

※このタイプの問題では差の公約数に着目することを覚えておきましょう。



例題 4

次の問いに答えなさい。

- (1) ある整数Aを987で割ると商が75で余りが392でした。Aを329で割ったときの余りを求めなさい。
(2) 8で割ると5余る整数と24で割ると20余る整数の和を8で割ったときの余りを求めなさい。

答え (1) 63 (2) 1

[例題 4 の解説]

- (1) $A \div 987 = 75$ あまり392 より $A = 987 \times 75 + 392 = 74417$
 $74417 \div 329 = 226$ あまり63

(別解)

$$987 \div 329 = 3 \text{ より } A = 987 \times 75 + 392 = 329 \times 3 \times 75 + 392 = 329 \times 225 + 392$$

329×225 は329で割り切れるので Aを329で割ったときの余りは 392を329で割ったときの余りと同じです。

よってAを329で割ったときの余りは $392 \div 329 = 1$ あまり63 より63

- (2) 8で割ると5余る整数 5, 13, 21, ... 24で割ると20余る整数 20, 44, 68, ...
ここで、8で割ると5余る整数を5, 24で割ると20余る整数を20 とします。

$(5 + 20) \div 8 = 3$ あまり1 より8で割ると5余る整数と24で割ると20余る整数の和を8で割ったときの余りは1

(別解)

24で割ると20余る整数を8で割ったときの余りを求めます。

$$24 \text{ で割ると } 20 \text{ 余る整数を } A \text{ とすると } A \div 24 = (\text{商}) \text{ あまり } 20 \text{ より } A = 24 \times (\text{商}) + 20$$

$$24 \times (\text{商}) \text{ は } 8 \text{ で割り切れて、余りの } 20 \text{ を } 8 \text{ で割ると } 20 \div 8 = 2 \text{ あまり } 4$$

よってAを8で割ったときの余りは4であることがわかります。

「8で割ると5余る整数」と「8で割ると4余る整数」の和は

$$(8 \text{ の倍数}) + 5 + (8 \text{ の倍数}) + 4 = (8 \text{ の倍数}) + 9 = (8 \text{ の倍数}) + 8 + 1$$

→ $(8 \text{ の倍数}) + 1$ なので8で割ったときの余りは1



例題 5

次の問いに答えなさい。

- (1) $123+124\times125+126\times127\times128$ を7で割ったときの余りを求めなさい。
(2) $2021\times2020\times2019\times2018$ を2017で割ったときの余りを求めなさい。

答え (1) 6 (2) 24

[例題 5 の解説]

- (1) ある数で割ったときの余りだけを求める場合は、

それぞれの数ある数で割ったときの「余り」に置きかえて計算して求めることができます。

例えば $19\times46+17$ を4で割ったときの余りを考えます。

$19\div4=4$ あまり3, $46\div4=11$ あまり2, $17\div4=4$ あまり1 なので

$19\times15+17$ を $3\times2+1$ に置きかえて余りを求めます。 $(3\times2+1)\div4=7\div4=1$ あまり3

よって $19\times46+17$ を4で割ったときの余りは3となります。確認しておきます。

$(19\times46+17)\div4=891\div4=222$ あまり3 となるので $3\times2+1$ で求めた余りと等しくなっています。

では $123+124\times125+126\times127\times128$ のそれぞれの数を7で割ったときの余りに置きかえます。

$123\div7=17$ あまり4

123を7で割ると余りが4なので、124の余りは5, 125の余りは6, 126の余りは0, 127の余りは1, 128の余りは2

$123+124\times125+126\times127\times128$ を $4+5\times6+0\times1\times2$ に置きかえて余りを求めます。

$(4+5\times6+0\times1\times2)\div7=34\div7=4$ あまり6 よって $123+124\times125+126\times127\times128$ を7で割ったときの余りは6

確認しておきます。

$123+124\times125+126\times127\times128=123+15500+2048256=2063879$

$2063879\div7=294839$ あまり6



例題と解説

- (2) $2021 \times 2020 \times 2019 \times 2018$ のそれぞれの数を2017で割ったときの余りに置きかえます。

$$2021 \times 2020 \times 2019 \times 2018 \rightarrow 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ より } 24 \div 2017 = 0 \text{ あまり } 24$$

よって $2021 \times 2020 \times 2019 \times 2018$ を2017で割ったときの余りは24となります。



例題と解説

例題6

次の問いに答えなさい。

- (1) 100万を17で割ったときの余りは9です。では1億を17で割ったときの余りはいくつですか。
- (2) 7を5回かけた数 $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ を20で割ったときの余りは7です。
では7を100回かけた数を20で割ったときの余りはいくつですか。

答え (1) 16 (2) 1

[例題6の解説]

- (1) $1\text{億} = 100\text{万} \times 100$

余りを求めるだけであれば、余りに置きかえて計算してもいいので、100万を9に置きかえます。

また $100 \div 17 = 5\text{あまり}15$ なので100を15に置きかえます。

$$1\text{億} \div 17 = 100\text{万} \times 100 \div 17 \rightarrow 9 \times 15 \div 17$$

$9 \times 15 \div 17 = 7\text{あまり}16$ より1億を17で割ったときの余りは16であることがわかります。

- (2) 7を5回かけた数を 7^5 と表すことにします。 ※ 7^5 は「7の5乗^{じょう}」と読みます。

次に7を25回かけた数を考えます。 $25 \div 5 = 5$ なので $7^{25} = 7^5 \times 7^5 \times 7^5 \times 7^5 \times 7^5$

$7^5 \div 20$ の余りは7なので 7^5 を7に置きかえて $7^{25} \div 20$ の余りを求めます。

$$(7^{25} \div 20 \text{ の余り}) = (7^5 \times 7^5 \times 7^5 \times 7^5 \times 7^5 \div 20 \text{ の余り}) \rightarrow (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \div 20 \text{ の余り}) = 7$$

7を100回かけた数 7^{100} は $100 \div 25 = 4$ より 7^{25} を4回かけた数なので

$$(7^{100} \div 20 \text{ の余り}) = (7^{25} \times 7^{25} \times 7^{25} \times 7^{25} \text{ の余り}) \rightarrow (7 \times 7 \times 7 \times 7 \div 20 \text{ の余り})$$

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \div 20 = 2401 \div 20 = 120\text{あまり}1 \text{ より}$$

7を100回かけた数を20で割ったときの余りは1であることがわかります。



例題と解説

例題 7

次の問いに答えなさい。

- (1) 1以上のある整数Aを9で割ったところ、商と余りが等しくなりました。Aにあてはまる数をすべて求めなさい。
- (2) 3桁の整数Aを17で割ったところ、商と余りが等しくなりました。Aにあてはまる整数は全部で何個ありますか。

答え (1) 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 (2) 11個

[例題 7 の解説]

- (1) 商と余りを○とします。

このとき $A \div 9 = \text{○あまり}\text{○}$ となるので $A = 9 \times \text{○} + \text{○} = 10 \times \text{○}$

よってAは10の倍数であることがわかります。ただし○は9で割ったときの余りなので8以下です。

$A = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$

- (2) 商と余りを○とします。

このとき $A \div 17 = \text{○あまり}\text{○}$ となるので $A = 17 \times \text{○} + \text{○} = 18 \times \text{○}$

よってAは18の倍数であることがわかります。ただし○は17で割ったときの余りなので16以下です。

○=5 のとき $A = 18 \times 5 = 90$ となり3桁ではないので条件にあてはまりません。

条件にあてはまるのは ○=6 から ○=16 までなのでAにあてはまる整数は全部で $16 - 6 + 1 = 11$ (個)



例題と解説

例題 8

ある整数Aに5を足すと7で割り切れ、7を足すと5で割り切れます。Aにあてはまる整数を小さい順に5つ求めなさい。

答え 23, 58, 93, 128, 163

[例題 8 の解説]

Aに5を足すと7で割り切れるので $A+5$ は7の倍数です。

$A+5$ に7を加えた $A+12$ も明らかに7の倍数です。

Aに7を足すと5で割り切れるので $A+7$ は5の倍数です。

$A+7$ に5を加えた $A+12$ も明らかに5の倍数です。

よって $A+12$ は7の倍数であり、5の倍数でもあるので $A+12$ は7と5の公倍数であることがわかります。

7と5の公倍数は 35, 70, 105, 140, 175, ... ← $A+12$

よってAは7と5の公倍数から12引いた数なので小さい順に 23, 58, 93, 128, 163, ... となります。

(別解)

$A+5$ ← 7の倍数

$A+7$ ← 5の倍数

$A+5$ は $A+7$ よりも2小さいので5の倍数より2小さい7の倍数を見つけます。

7の倍数 7, 14, 21, **28**, 35, ... ← $A+5$

5の倍数 5, 10, 15, 20, 25, **30**, ... ← $A+7$

$A+5=28$, $A+7=30$ なので最も小さいAは23であることがわかります。

5を足すと7で割り切れ、7を足すと5で割り切れる数は23に5と7の公倍数を足した数なので

小さい順に 23, 58, 93, 128, 163, ...



例題と解説

ポイントまとめ

- ある数で割ったときの余りだけを求める場合は、
それぞれの数をある数で割ったときの「余り」に置きかえて計算して求めることができます。