



例題と解説

例題 1

A, B, C, D, E の5人がいます。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 5人が横一列に並びます。このとき並び方は何通りありますか。
- (2) 5人のうち3人が横一列に並びます。このとき並び方は何通りありますか。
- (3) AとBが両端^{りょうたん}にくるように5人が横一列に並びます。このとき並び方は何通りありますか。
- (4) AとBがとなり合わないように5人が横一列に並ぶ並び方は何通りありますか。

答え (1) 120通り (2) 60通り (3) 12通り (4) 72通り

[例題 1 の解説]

順番が異なれば別として数える並べ方を順列^{じゅんれつ}といいます。順列について整理しておきます。

A, B の2人が横一列に並ぶ場合は AB, BA の2通りです。

A, B, C の3人が横一列に並ぶ場合は ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA の6通りです。

樹形図を書けば数え上げられますが、数が多くなってくると難しくなります。

そこで順列の計算方法を理解しておきましょう。

順列の計算は P (パーミュテーション) という記号を用いて表します。

A, B, C の3人を横一列に並べる場合 (リレーで3人の走る順番を決める場合と同じ) は $3P_3$ となります。

これは「3人のうち、3人を並べかえる」という計算です。「サン ピー サン」と読みます。

Pの左の数字から始めて、1ずつ小さくなるように、Pの右の数字の回数分かけます。

よって $3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (通り) となります。

これは右図のように考えた場合と同じです。



A, B, Cの うち誰が並ぶ かの3通り	残りの2人の うち誰が並ぶ かの2通り	残りの1人が 並ぶので1通り
-----------------------------	---------------------------	-------------------

例えば A, B, C, D の4人を横一列に並べる場合は $4P_4$

$4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (通り)

例えば A, B, C, D の4人のうち2人を横一列に並べる場合は $4P_2$

$4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (通り)

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ (通り)}$$

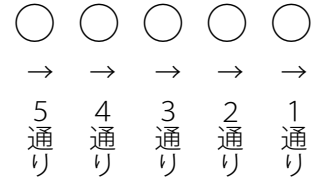


例題と解説

ただし場合の数の問題では計算だけで解ける問題は少なく、実際は場合分けや樹形図で書き上げることが欠かせません。
場合分けや問題の条件などをきちんと整理した上で、使えるところで計算を使うようにしましょう。

- (1) 5人を並べかえるだけなので ${}_5P_5$ です。

$${}_5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120(\text{通り})$$



- (2) 5人のうち3人を並べかえるので ${}_5P_3$ です。

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60(\text{通り})$$

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120(\text{通り})$$

※書き上げて確認しておきます。

ABC, ACB, ABD, ADB, ABE, AEB, ACD, ADC, ACE, AEC, ADE, AED	… 12通り
BAC, BCA, BAD, BDA, BAE, BEA, BCD, BDC, BCE, BEC, BDE, BED	… 12通り
CAB, CBA, CAD, CDA, CAE, CEA, CBD, CDB, CBE, CEB, CDE, CED	… 12通り
DAB, DBA, DAC, DCA, DAE, DEA, DBC, DCB, DBE, DEB, DCE, DEC	… 12通り
EAB, EBA, EAC, ECA, EAD, EDA, EBC, ECB, EBD, EDB, ECD, EDC	… 12通り
全部で $12 \times 5 = 60(\text{通り})$	

パーミュテーションを使えばすばやく正確に計算で求めることができます。

- (3) AとBが両端にくるという条件がついているので場合分けをします。

A○○○B の場合 … ○○○に C, D, E がどのように並ぶかということなので ${}_3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6(\text{通り})$

B○○○A の場合 … ○○○に C, D, E がどのように並ぶかということなので ${}_3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6(\text{通り})$

よって全部で $6 \times 2 = 12(\text{通り})$

※場合の数の問題は「場合分け」がきちんとできるかどうか最も重要なポイントです。



例題と解説

(4) AとBがとなり合わないという条件がついているので場合分けをします。

A○B○○ の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

A○○B○ の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

A○○○B の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

○A○B○ の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

○A○○B の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

○○A○B の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

全部で $6 \times 6=36$ (通り) さらにAとBが逆になる場合も同じように36通りなので $36+36=72$ (通り)

(別解)

5人の横一列の並び方は $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$ (通り) です。この120通りから「AとBがとなり合う」場合を引けば「AとBがとなり合わない」場合の72通りになるはずです。AとBがとなり合う場合を求めます。

AB○○○ の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

○AB○○ の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

○○AB○ の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

○○○AB の場合 … 3つの○に C, D, E がどのように並ぶかということなので $3P_3=3 \times 2 \times 1=6$ (通り)

全部で $6 \times 4=24$ (通り) さらにAとBが逆になる場合も同じように24通りなので $24+24=48$ (通り)

よって (AとBがとなり合わない場合) $=120-48=72$ (通り)

このように逆の事柄^{ことがら}に着目したほうが簡単に求められることがあります。

この問題では「AとBがとなり合わない」場合は「AとBがとなり合う」場合の逆の事柄です。

このような逆の事柄を^{よじしょう}余事象^{よじしょう}といいます。



例題と解説

例題2

[0] , [1] , [2] , [3] , [4] , [5] のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で6枚あります。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 6枚から3枚のカードを選びます。その選び方は何通りありますか。
- (2) 6枚のうち3枚のカードを並べかえて3桁^{けた}の整数を作ります。整数は全部で何通り作ることができますか。
- (3) (2)で作った整数のうち、204より大きな整数は何個ありますか。
- (4) 6枚のうち3枚のカードを並べかえて3桁の整数を作ります。5の倍数は何通り作ることができますか。
- (5) 6枚のうち4枚のカードを並べかえて4桁の整数を作ります。2の倍数は何通り作ることができますか。
- (6) 6枚のうち3枚のカードを並べかえて3桁の整数を作ります。4の倍数は何通り作ることができますか。
- (7) 6枚のうち3枚のカードを並べかえて3桁の整数を作ります。3の倍数は何通り作ることができますか。
- (8) 6枚のうち3枚のカードを並べかえて3桁の整数を作ります。6の倍数は何通り作ることができますか。

答え (1) 20通り (2) 100通り (3) 77個 (4) 36通り (5) 156通り (6) 24通り (7) 40通り (8) 20通り

[例題2の解説]

場合の数は大きく分けて順列と組み合わせに分けることができます。組み合わせは順列とはちがって順番は関係ありません。組み合わせについて整理しておきます。

A , B , C の3人から3人を選ぶとき、その選び方(組み合わせ)は (A , B , C) だけなので1通りです。

A , B , C の3人から2人を選ぶとき、その選び方は (A , B) , (A , C) , (B , C) の3通りです。

A , B , C の3人から1人を選ぶとき、その選び方は (A) , (B) , (C) の3通りです。

組み合わせの計算は C (コンビネーション) という記号を用いて表します。

A , B , C の3人から3人を選ぶ場合は ${}_3C_3$ となります。

これは「3人から、3人を選ぶ」という計算です。「サン シー サン」と読みます。

Cの左の数字から始めて、1ずつ小さくなるように、Cの右の数字の回数分かれます。

その数を、Cの右の数字から始めて、1ずつ小さくなるように、Cの右の数字の回数分かけた数で割ります。

よって ${}_3C_3 = \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 1$ (通り) となります。



例題と解説

例えば A, B, C, D の4人から2人を選ぶ場合は $4C_2$

$$4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6(\text{通り})$$

例えば A, B, C, D, E の5人から3人を選ぶ場合は $5C_3$

$$5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10(\text{通り})$$

ただし「5人から3人を選ぶ」のであれば、選ばない2人に着目して「5人から2人を選ぶ」と考えた方が簡単です。
(5人から3人を選ぶ場合の数) = (5人から2人を選ぶ場合の数) となるはずです。確かめておきます。

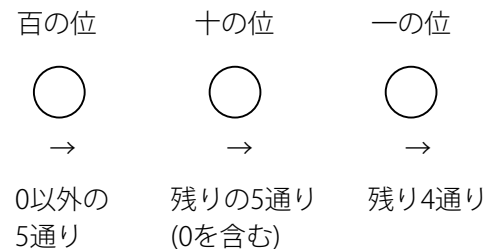
$$5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10(\text{通り})$$

(1) 6枚から3枚を選ぶので $6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20(\text{通り})$

(2) 6枚のうち3枚を並びかえるのでパーミュテーションを用いて $6P_3$ とするのはまちがいです。
3けたの整数を作るので、百の位に0を使うことはできません。

右図のように考えます。

$$5 \times 5 \times 4 = 100(\text{通り})$$





例題と解説

- (3) 作ることのできる3けたの整数で最小は102，最大は543なので204は真ん中よりも小さい整数です。
よって204より大きい整数ではなく、余事象の204以下の整数の個数を求めて、(2)で求めた100個から引きます。
※「204より大きい整数」の余事象は「204より小さい整数」ではなく、「204以下の整数」です。

場合分けをします。

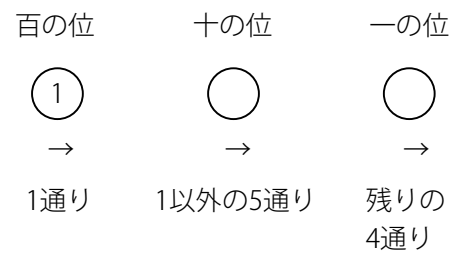
百の位が1の場合 … 右図1より $1 \times 5 \times 4 = 20$ (通り)

百の位が2の場合 … 201，203，204 の3通り

よって204以下の整数は全部で $20 + 3 = 23$ (個)

204より大きな整数は $100 - 23 = 77$ (個)

図1



- (4) 3桁の5の倍数を作ります。5の倍数条件は「一の位が0または5」です。

場合分けをします。

一の位が0の場合 … 右図2より $5 \times 4 \times 1 = 20$ (通り)

※図2は 一の位 → 百の位 → 十の位 の順番で考えています。

一の位が5の場合 … 右図3より $4 \times 4 \times 1 = 16$ (通り)

※図3は 一の位 → 百の位 → 十の位 の順番で考えています。

よって全部で $20 + 16 = 36$ (通り)

5の倍数を作るときは一の位を決定してから他の位の場合の数を考えましょう。

図2

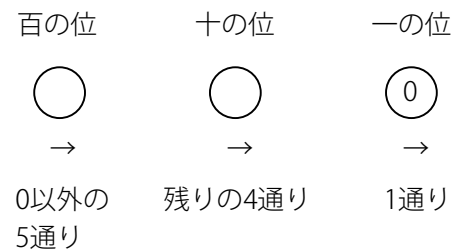
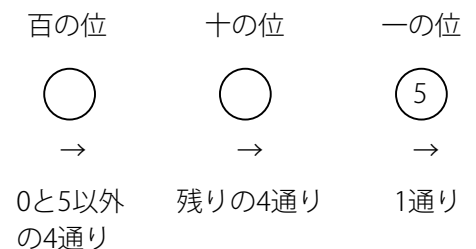


図3





例題と解説

- (5) 4桁の2の倍数を作ります。2の倍数条件は「一の位が0か2か4か6か8 (偶数)」です。

カードは0～5なので偶数は 0, 2, 4

場合分けをします。

一の位が0の場合 … 下図4より $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$ (通り)

※図4は 一の位 → 千の位 → 百の位 → 十の位 の順番で考えています。

一の位が 2, 4 の場合 … 下図5より $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ (通り)

※図5は 一の位 → 千の位 → 百の位 → 十の位 の順番で考えています。

図4

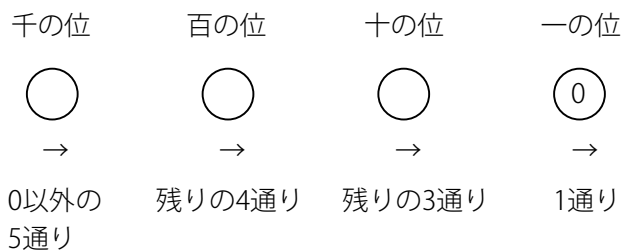
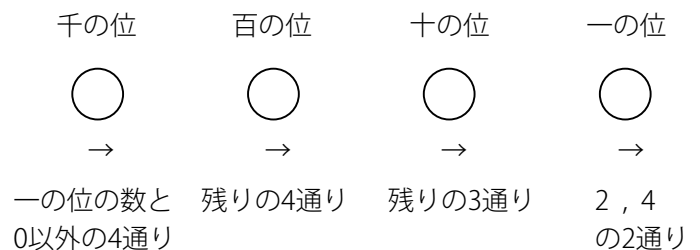


図5



よって全部で $60 + 96 = 156$ (通り)

- (6) 3桁の4の倍数を作ります。4の倍数条件は「下2桁が00または4の倍数」です。

下2桁が00または4の倍数になればいいので下2桁で場合分けします。

4の倍数になる場合の下2桁で考えられるのは 04, 12, 20, 24, 32, 40, 52

下2桁が 04, 20, 40 の場合 … 百の位の数の選び方がそれぞれ4通りなので $4 \times 3 = 12$ (通り)

下2桁が 12, 24, 32, 52の場合 … 百の位の数の選び方がそれぞれ0以外の3通りなので $3 \times 4 = 12$ (通り)

よって全部で $12 + 12 = 24$ (通り)



- (7) 3桁の3の倍数を作ります。3の倍数条件は「各位の数の和が3の倍数」です。

各位の数の和が3の倍数になるカードの組み合わせで場合分けします。

3つの数の和が3の倍数になる組み合わせは

(0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5), (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)

0を含む場合 (0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5)

百の位は0以外の2通り、十の位は0も含んで残りの2通り、一の位は残りの1通りなので

それぞれ $2 \times 2 \times 1 = 4$ (通り) よって $4 \times 4 = 16$ (通り)

0を含まない場合 (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)

百の位は3通り、十の位は残りの2通り、一の位は残りの1通りなので

それぞれ $3 \times 2 \times 1 = 6$ (通り) よって $6 \times 4 = 24$ (通り)

よって全部で $16 + 24 = 40$ (通り)

- (8) 3桁の6の倍数を作ります。6の倍数条件は「各位の数の和が3の倍数で一の位が偶数」です。

3の倍数条件があてはまるカードの組み合わせは(7)より

(0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5), (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)

それぞれの組み合わせについて、一の位が偶数になるように並べかえます。

(0, 1, 2) の場合 … 102, 120, 210

(0, 1, 5) の場合 … 150, 510

(0, 2, 4) の場合 … 204, 240, 402, 420

(0, 4, 5) の場合 … 450, 504, 540

(1, 2, 3) の場合 … 132, 312

(1, 3, 5) の場合 … あてはまる3桁の数はありません。

(2, 3, 4) の場合 … 234, 324, 342, 432

(3, 4, 5) の場合 … 354, 534

よって全部で20通り



例題と解説

例題 3

① ～ ⑩のカードがそれぞれ1枚ずつ、全部で10枚あります。このうち何枚かを選んでカードに書かれた数の和が47になるようにします。このような選び方は何通りありますか。

答え 6通り

[例題 3 の解説]

和が47になる組み合わせを探します。

例えば次のような組み合わせが考えられます。(1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10)

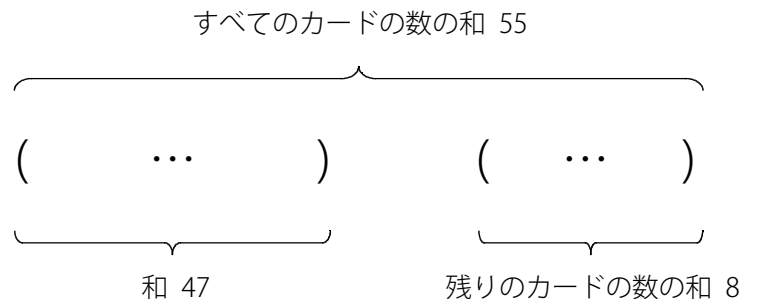
$1+2+4+6+7+8+9+10=47$ となります。

すべて探すのは大変なので残りのカードに着目します。

1～10のすべてのカードの和は $(1+10) \times 10 \div 2 = 55$

右図のように和が47になるようにカードを選んだとき

残りのカードの数の和は $55-47=8$ になります。



「残りのカードの数の和が8になる」という場合が何通りあるかを考えた方が簡単です。

8になる組み合わせをカードの枚数で場合分けして考えます。

1枚 … (8)

2枚 … (1, 7), (2, 6), (3, 5)

3枚 … (1, 2, 5), (1, 3, 4)

全部で6通り

つまり和が47になる組み合わせも同じ6通りです。

「100人から99人を選ぶ」のは「100人から1人」選ぶのと同じです。

「選ばないもの」や「残りのもの」に着目すると簡単に解けることがあります。



ポイントまとめ

- ・ 順番が異なれば別として数える並べ方を ^{じゅんれつ}順列 といいます。
- ・ 順列の計算は P (パーミュテーション) という記号を用いて表します。
- ・ A, B, C, D の4人を横一列に並べる場合は $4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (通り)
- ・ A, B, C, D の4人のうち2人を横一列に並べる場合は $4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (通り)
- ・ 場合分けや問題の条件などをきちんと整理した上で、使えるところで計算を使うようにしましょう。
- ・ 場合の数の問題は「場合分け」がきちんとできるかどうか最も重要なポイントです。
- ・ 「AとBがとなり合わない」場合は「AとBがとなり合う」場合の逆の事柄です。
このような逆の事柄を ^{よじしょう}余事象 といいます。
- ・ 場合の数は大きく分けて順列と組み合わせに分けることができます。
- ・ 組み合わせの計算は C (コンビネーション) という記号を用いて表します。
- ・ A, B, C, D の4人から2人を選ぶ場合は $4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ (通り)
- ・ A, B, C, D, E の5人から3人を選ぶ場合は $5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ (通り)
- ・ 「5人から3人を選ぶ」 = 「選ばない2人を選ぶ」 = 「5人から2人を選ぶ」 なので $5C_3 = 5C_2$