中学受験Unit.42-３　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

例題１

図１のような台形を底面とする四角柱を平面で切って、図２のような立体を作りました。

（１）　図２のアの長さを求めなさい。

（２）　図２の立体の体積を求めなさい。

図１

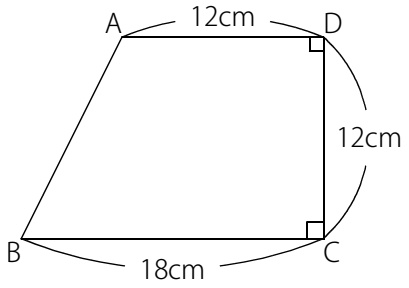
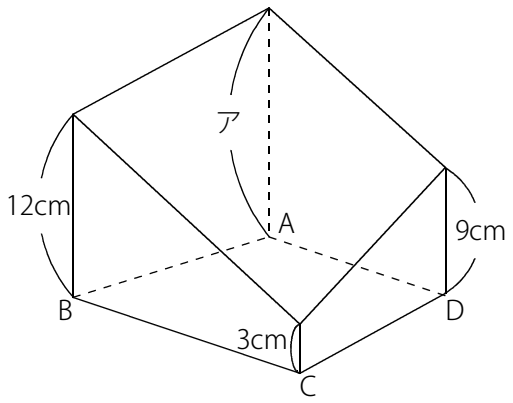


図２



答え　（１）15cm（２）1728cm³

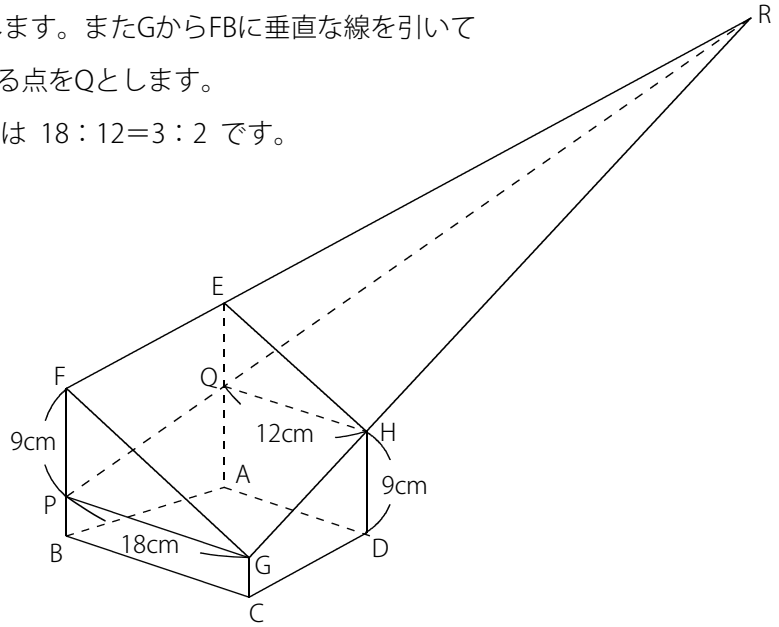
[例題１の解説]

（１）　右図のようにFEとGHを延長して交わる点をRとします。またGからFBに垂直な線を引いて交わる点をP，HからEAに垂直な線を引いて交わる点をQとします。
このとき三角形RPGと三角形RQHは相似で相似比は 18：12＝3：2 です。

RP：RQ＝3：2 で、三角形RFPと三角形REQは相似なので FP：EQ＝3：2

よって EQ＝9cm×$\frac{2}{3}$＝6cm

QA＝HD＝9cm なので
ア＝EQ＋QA＝6＋9＝15cm

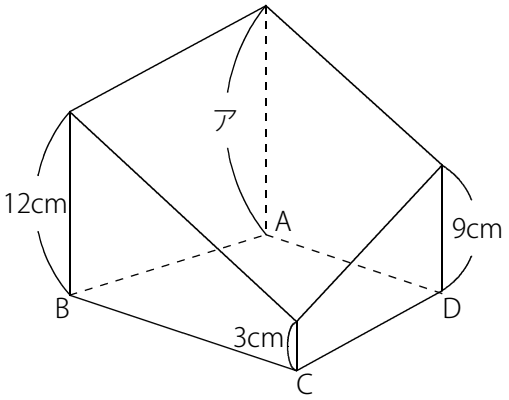


(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

※ 底面が台形なので ア＋3＝12＋9 という式は成り立ちません。

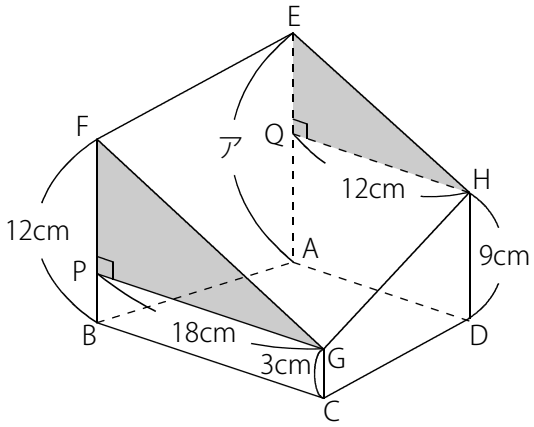


(別解)

右図のようにGを通ってBCと平行な直線をひき、FBと交わる点をP，
同様にHを通ってADと平行な直線をひき、EAと交わる点をQとします。
つまりPGとQHは平行です。

またFPとEQは底面ABCDに垂直なので平行です。
そしてEFGHは１つの切断面なのでFGとEHは平行です。

よって色のついた部分の三角形は３辺がそれぞれ平行なので相似です。



PG：QH＝18cm：12cm＝3：2 なので相似比は 3：2 です。

FP＝12－PB＝12－GC＝12－3＝9cm なので EQ＝$9\times\frac{2}{3}$＝6cm

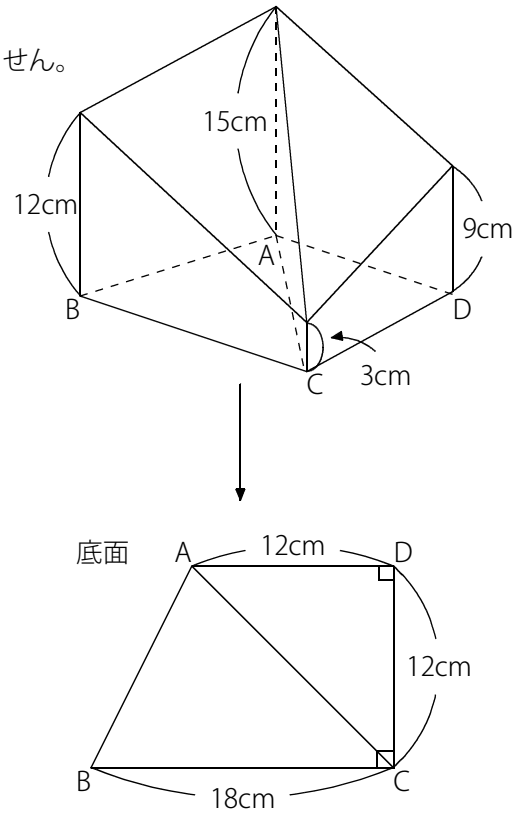
ア＝EQ＋QA＝6＋HD＝6＋9＝15cm

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

（２）　底面が台形なので (底面積)×(高さの平均) で体積を求めることはできません。
そこで右図のように三角柱２つに分けます。



断頭三角柱の体積は (底面積)×(高さの平均) で求めることができます。

(左側の断頭三角柱の体積)

$=(\text{三角形ABCの面積})\times\dfrac{15+12+3}{3}=18\times12\div2\times10=1080\text{cm}^3$

(右側の断頭三角柱の体積)

$=(\text{三角形ACDの面積})\times\dfrac{15+9+3}{3}=12\times12\div2\times9=648\text{cm}^3$

よって (体積)＝1080＋648＝1728cm³

※ (底面積)×(高さの平均) で計算をすると

$(\text{体積})=(\text{台形ABCD})\times\dfrac{15+12+3+9}{4}=180\times9.75=1755\text{cm}^3$

となります。この解法は正しくありません。注意しましょう。

(C) 2014 min-san.com

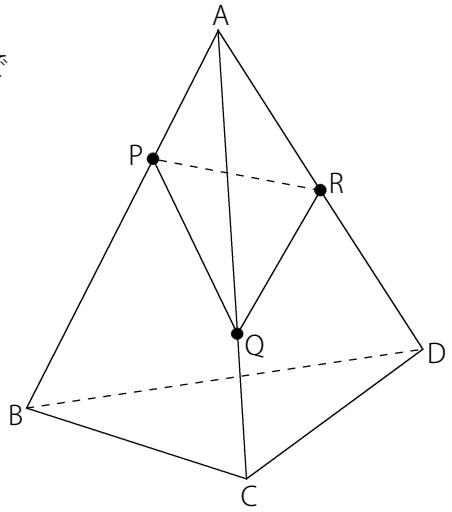
中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

例題２

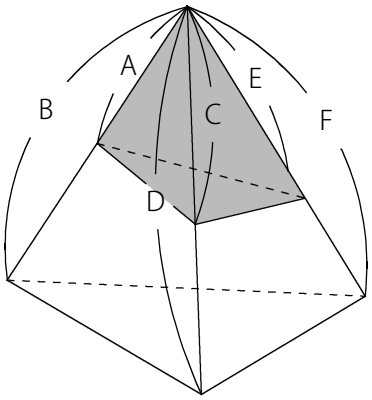
右図のような三角すいA-BCDがあります。

AP：PB＝1：2，AQ：QC＝9：4，AR：RD＝1：1 となる３点PQRを通る平面で切ってできる三角すいA-PQRの体積は三角すいA-BCDの体積の何倍ですか。



答え $\frac{3}{26}$倍

[例題２の解説]



三角すいの体積では次のことが成り立ちます。

右図で (色のついた部分の体積)＝(全体の三角すい)×$\frac{A}{B}$×$\frac{C}{D}$×$\frac{E}{F}$

※ 四角すいではこの公式は使えません。

この問題では AP：PB＝1：2，AQ：QC＝9：4，AR：RD＝1：1 なので

(三角すいA-PQRの体積)

＝(三角すいA-BCDの体積)×$\frac{AP}{AB}$×$\frac{AQ}{AC}$×$\frac{AR}{AD}$＝(三角すいA-BCDの体積)×$\frac{1}{3}$×$\frac{9}{13}$×$\frac{1}{2}$＝(三角すいA-BCDの体積)×$\frac{3}{26}$

よって、三角すいA-PQRの体積は三角すいA-BCDの体積の$\frac{3}{26}$倍です。

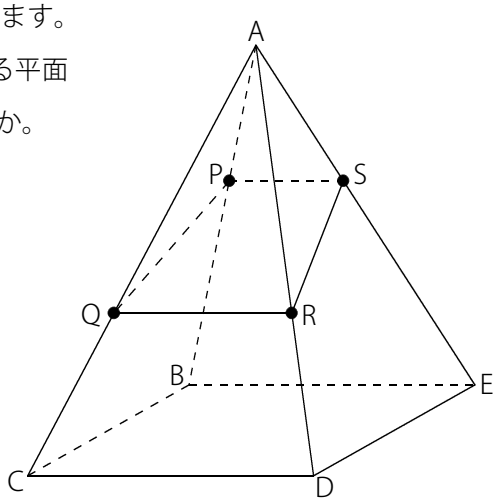
(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

例題３

底面が正方形で、４つの側面が合同な二等辺三角形の四角すいA-BCDEがあります。
AP：PB＝AS：SE＝1：2 , AQ：QC＝AR：RD＝3：2 となる４点PQRSを通る平面で切ってできる四角すいA-PQRSの体積は四角すいA-BCDEの体積の何倍ですか。



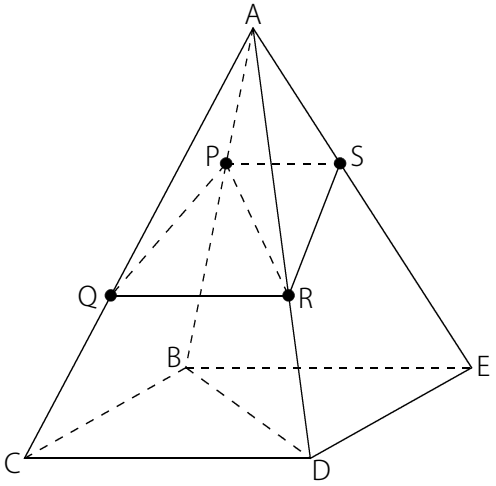
答え $\frac{7}{75}$倍

[例題３の解説]

右図のように三角すいA-BCDと三角すいA-BDEの２つに分けます。

もとの四角すいの底面は正方形なので、三角すいA-BCDと三角すいA-BDEの体積は

もとの四角すいの体積の$\frac{1}{2}$です。



(三角すいA-PQRの体積)

＝(もとの四角すいの体積)×$\frac{1}{2}$×$\frac{1}{3}$×$\frac{3}{5}$×$\frac{3}{5}$＝(もとの四角すいの体積)×$\frac{3}{50}$

(三角すいA-PRSの体積)

＝(もとの四角すいの体積)×$\frac{1}{2}$×$\frac{1}{3}$×$\frac{1}{3}$×$\frac{3}{5}$＝(もとの四角すいの体積)×$\frac{1}{30}$

よって四角すいA-PQRSの体積は、四角すいA-BCDEの体積の $\frac{3}{50}+\frac{1}{30}=\frac{7}{75}$倍 であることがわかります。

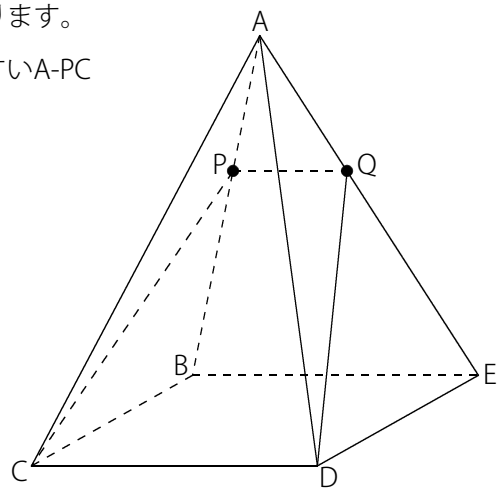
(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

例題４

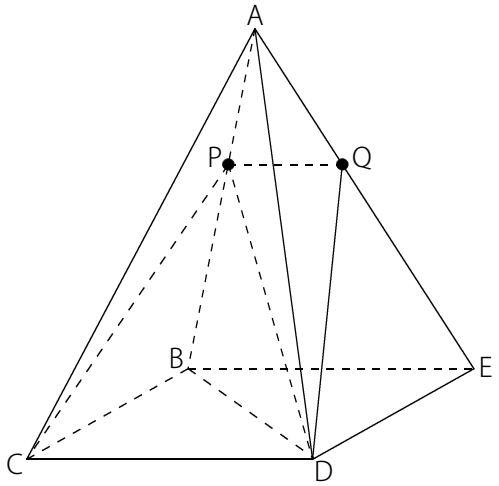
底面が正方形で、４つの側面が合同な二等辺三角形の四角すいA-BCDEがあります。
AP：PB＝AQ：QE＝1：2 となる４点PQDCを通る平面で切ってできる四角すいA-PCDQの体積は四角すいA-BCDEの体積の何倍ですか。



答え $\frac{2}{9}$倍

[例題４の解説]

右図のように三角すいA-BCDと三角すいA-BDEの２つに分けます。
もとの四角すいの底面は正方形なので、三角すいA-BCDと三角すいA-BDEの体積はもとの四角すいの体積の$\frac{1}{2}$です。



(三角すいA-PCDの体積)

＝(もとの四角すいの体積)×$\frac{1}{2}$×$\frac{1}{3}$×$\frac{1}{1}$×$\frac{1}{1}$＝(もとの四角すいの体積)×$\frac{1}{6}$

(三角すいA-PDQの体積)

＝(もとの四角すいの体積)×$\frac{1}{2}$×$\frac{1}{3}$×$\frac{1}{3}$×$\frac{1}{1}$＝(もとの四角すいの体積)×$\frac{1}{18}$

よって四角すいA-PCDQの体積は、四角すいA-BCDEの体積の $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$倍 であることがわかります。

(C) 2014 min-san.com

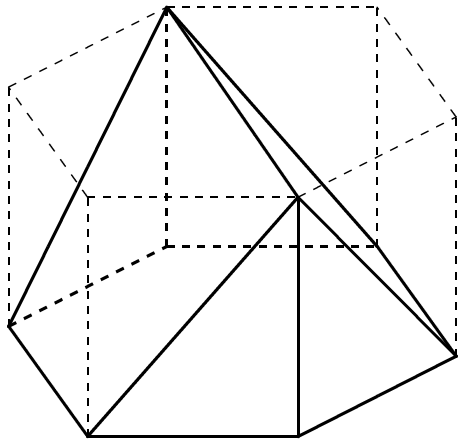
中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

例題５

正六角柱を平面で２回切って、右図のような立体を作りました。

この立体はもとの正六角柱の体積の何倍ですか。

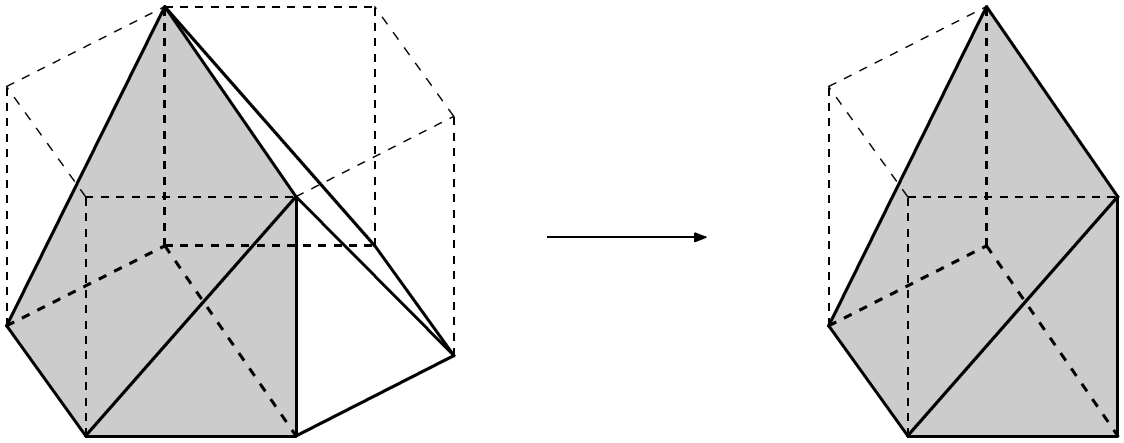


答え $\frac{5}{9}$倍

[例題５の解説]

「正○角柱」というのは底面が「正○角形」の角柱です。この問題では正六角柱なので底面が正六角形です。

下図のように立体の半分が全体のどれだけにあたるかを求めて、最後に２倍することにします。



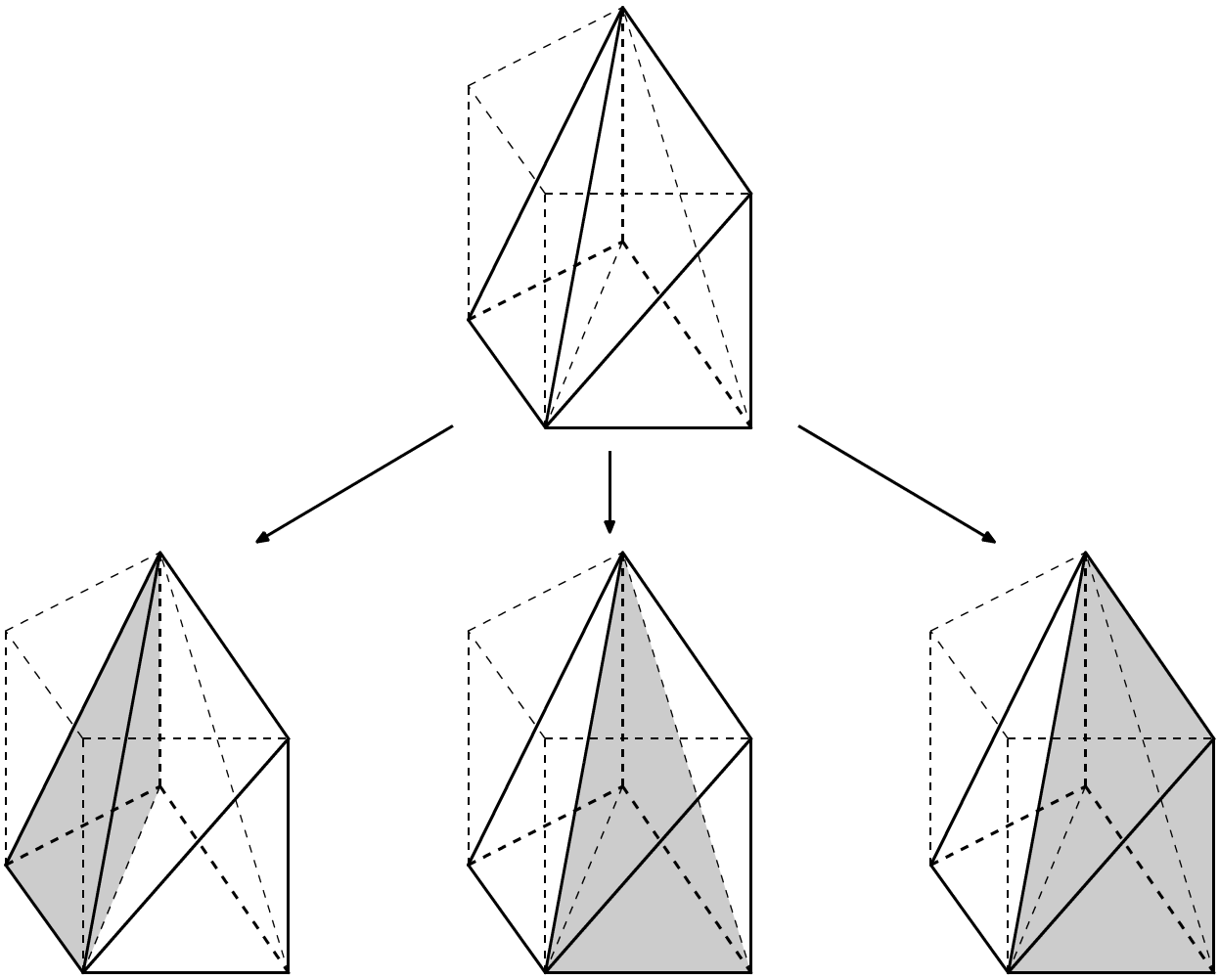
(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

ここで下図のように立体を３つの立体①, 立体②, 立体③に分けます。

立体①, 立体②, 立体③はすべて三角すいです。



立体①　　立体②　　立体③

それぞれの立体がもとの正六角柱のどれだけにあたるかを求めます。

(C) 2014 min-san.com

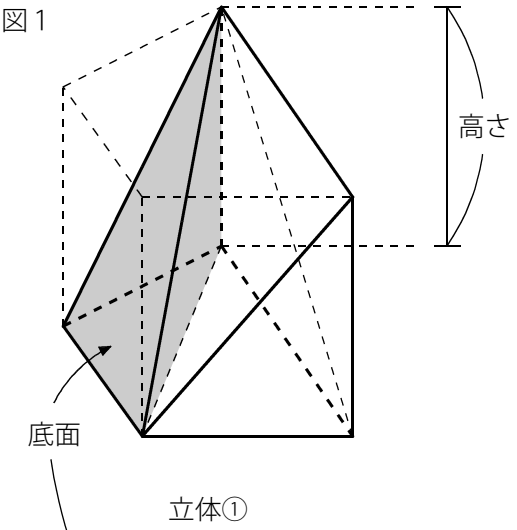
中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

もとの正六角柱の底面積を１，高さを１とします。
このとき (正六角柱の体積)＝1×1＝1 となります。

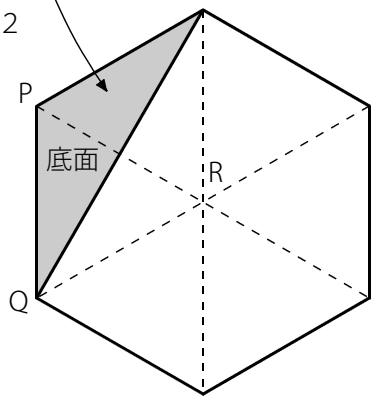
右図１より (立体①の高さ)＝1 です。

図１



また底面は右図２のような形をしています。

図２



正六角形を６等分してできる正三角形PQRと比べると
底辺の長さと高さが等しいので (立体①の底面積)＝$\frac{1}{6}$×1×1＝$\frac{1}{6}$

※ この三角形が正六角形の$\frac{1}{6}$であることは覚えておきましょう。

立体①は三角すいなので (体積)＝(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$ です。

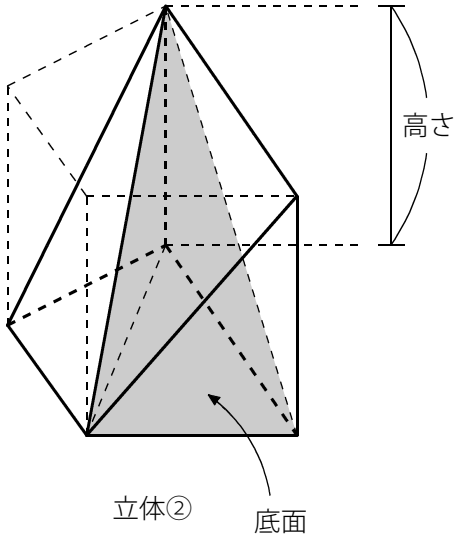
よって (立体①の体積)＝$\frac{1}{6}$×1×$\frac{1}{3}$＝$\frac{1}{18}$

(C) 2014 min-san.com

例題と解説

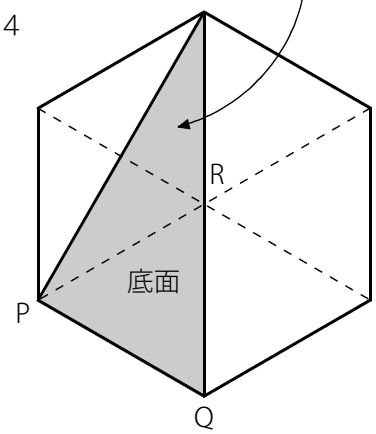
右図３より (立体②の高さ)＝1 です。

図３



また底面は右図４のような形をしています。

図４



正六角形を６等分してできる正三角形PQRと比べると

底辺の長さは等しく、高さが２倍なので (立体②の底面積)＝$\frac{1}{6}\times1\times2=\frac{1}{3}$

立体②は三角すいなので (体積)＝(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$ です。

よって (立体②の体積)＝$\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(C) 2014 min-san.com

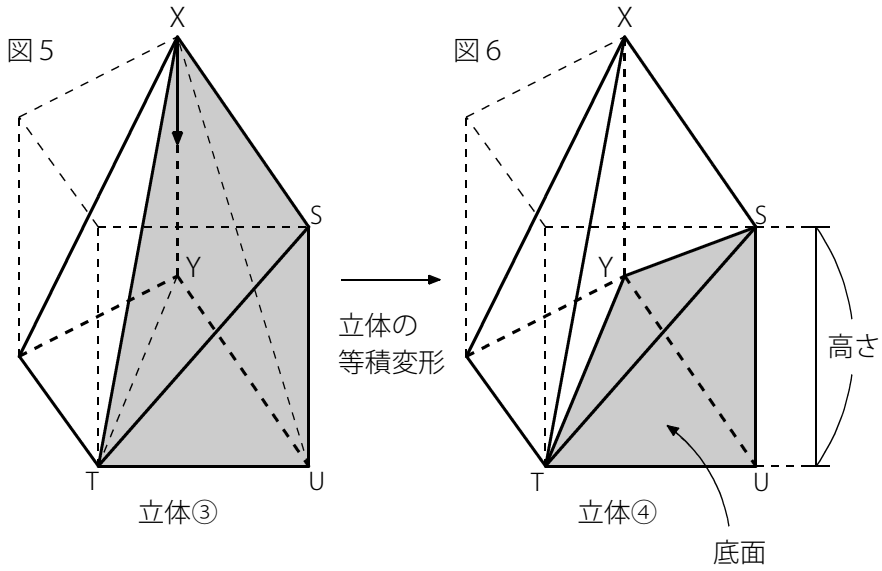
中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

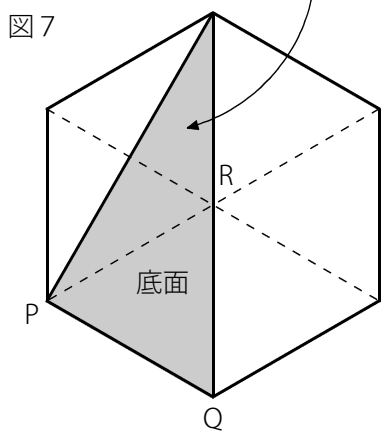
右図５の立体③を右図６の立体④のように等積変形します。

この等積変形では底面を三角形STUとして頂点Xを頂点Yに等積変形しています。

このとき底面は同じで、底面STUからの高さも同じなので、立体③と④の体積は同じです。



立体④の底面は右図７のような形をしています。



正六角形を６等分してできる正三角形PQRと比べると

底辺の長さは等しく、高さが２倍なので (立体②の底面積)＝$\frac{1}{6}$×1×2＝$\frac{1}{3}$

立体④は三角すいなので (体積)＝(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$ です。

よって (立体③の体積)＝(立体④の体積)＝$\frac{1}{3}$×1×$\frac{1}{3}$＝$\frac{1}{9}$

(立体①の体積)＋(立体②の体積)＋(立体③の体積)＝$\frac{1}{18}$＋$\frac{1}{9}$＋$\frac{1}{9}$＝$\frac{5}{18}$

この$\frac{5}{18}$が切断してできる立体の半分なので、切断してできる立体の体積はもとの正六角柱の $\frac{5}{18}$×2＝$\frac{5}{9}$倍 となります。

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.42- 3　5年　立体図形４
角柱と角すいの切断

例題と解説

ポイントまとめ

・角すいの切断は三角すいに分けて考えましょう。

(C) 2014 min-san.com