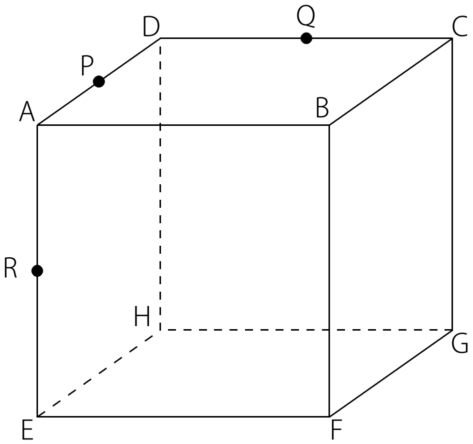
中学受験Unit.41- 3　5年　立体図形３
立方体の切断２

例題と解説

例題１

右図は１辺6cmの立方体です。点P，Q，Rはそれぞれ辺の中点です。
この立方体を３点 P，Q，R を通る平面で切り分けます。
このとき次の問に答えなさい。

（１）　右図に切断面をかきなさい。
（２）　切ってできる立体のうち点Hを含む立体の体積を求めなさい。



答え　（１）省略（２）108cm^3

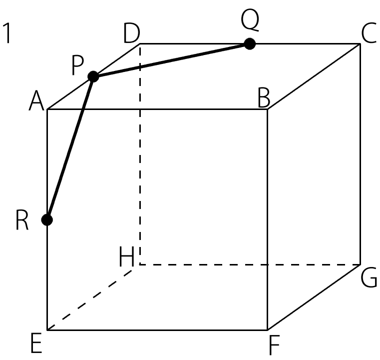
[例題１の解説]

（１）　立体切断ルールは次の２つです。

ルール①　同じ平面上にある点を直線で結ぶ
ルール②　平行な２枚の平面上には平行な切断線を描く

ルール①にしたがって、PとQ、PとRを結ぶと右図１のようになります。

図１

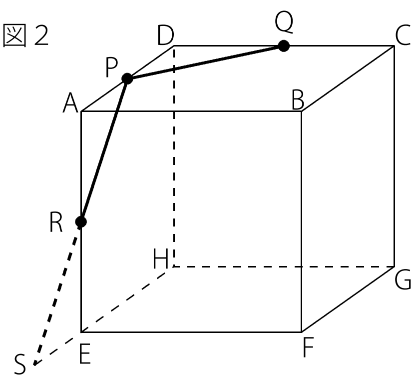


このままではここから先に進むことはできません。
そこで面を広げて考えます。

PRをRの方向に延長してできる線が、面EFGHと同じ平面に交わる点を右図２のように点Sとします。

※ 点Sは面EFGHと同じ平面上にあります。

図２

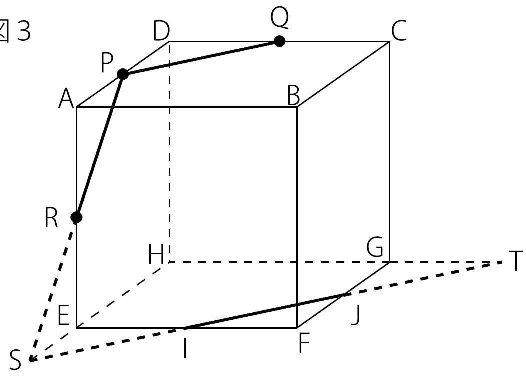


例題と解説

ここでルール②を利用します。
面ABCDと面EFGHは平行なので、点Sを通るように
PQと平行な直線を、面CDHGの平面に交わるまで描きます。
そこで交わってできる点を点Tとします。
このとき右図３のようになります。
※ 点IとJはそれぞれ辺の中点です。

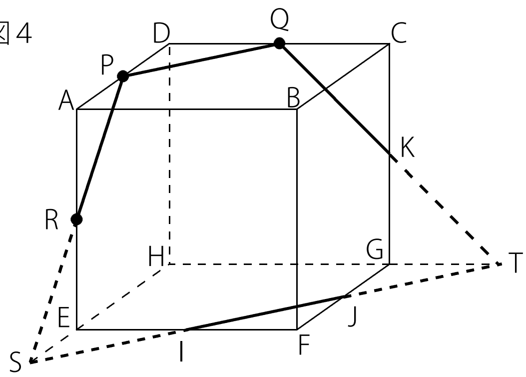
PD：QD＝1：1 なので SH：TH も 1：1 です。

図３



次にルール①にしたがって、
点Qと点Tは同じ平面上にあるので右図４のように結びます。
※ 点Kは辺の中点です。

図４

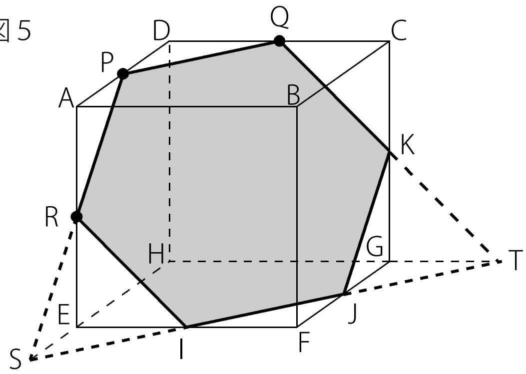


最後に同じ平面上にある点RとI，点KとJ をそれぞれ結ぶと
完成です。

切断面は右図５のように正六角形になります。
図５の切断面を見ると、ルール①とルール②が
完全にあてはまっていることが確認できます。

※ ルール①でもルール②でも先に進めない場合は
立体の「見えていない面」まで広げて考えましょう。

図５



(参考)

右図の Ｐ，Ｑ，Ｒ の３点を通る平面で切断する場合も
切断面は同じ正六角形になります。

切断面を作図する手順は次のようになります。

まず同じ平面上にあるPとQを結びます。(ルール①)

面ABCDと面EFGHは平行なのでPQと平行な線を
点Rを通るように面EFGHに描きます。
ここまでで右図２のようになります。

この先は面を広げて考えます。

直線RIを両方に延長して、その延長した線が
面AEHDの平面，面CDHGの平面 と交わる点を
それぞれ点 Ｓ，Tとします。

PとS，QとTをそれぞれ結び、辺との交点をそれぞれ
点J, K とします。

最後に同じ平面上の点をすべて結ぶと、右図３のように
切断面の作図が完成します。

図１

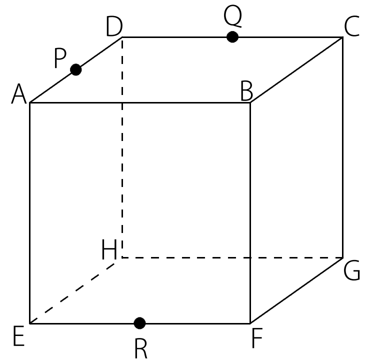


図２

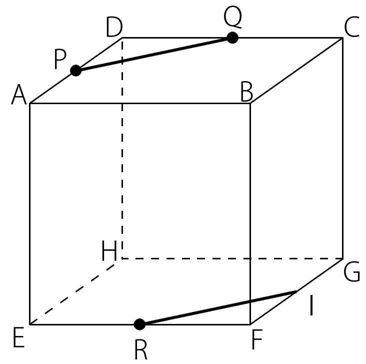
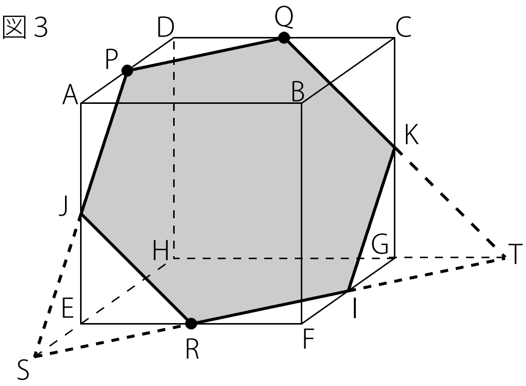


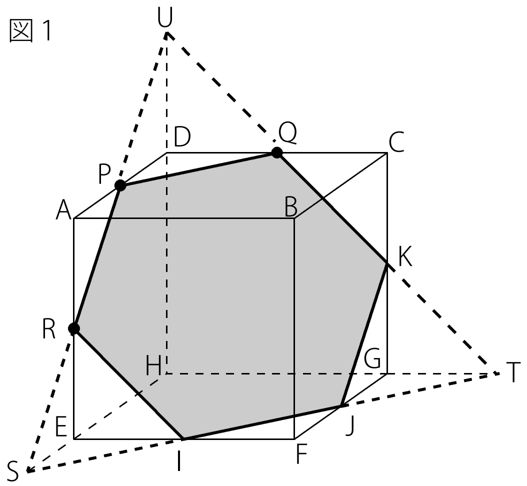
図３



例題と解説

（２）　点Hを含む立体の体積を求めます。

図１



直線PRをP方向に延長し、さらに直線QKをQ方向に延長すると、右図１のようになります。

求めたい立体は大きな三角すいU-STHから、
３つの小さな三角すいを引いてできる立体です。
※　３つの小さな三角すい　U-PQD，R-SIE，K-JTG

大きな三角すいU-STHの高さUHの長さを求めます。
三角形UDQと三角形QCKと三角形KGTは合同なので UD＝DQ＝6÷2＝3cm

よって UH＝UD＋DH＝3＋6＝9cm
三角形UHSとSHTとTHUはそれぞれ直角二等辺三角形なのでSHとTHも9cmです。

(大きな三角すいU-STHの体積)＝9×9÷2×9×$\frac{1}{3}$＝121.5cm^3

(小さな三角すい１個分の体積)＝3×3÷2×3×$\frac{1}{3}$＝4.5cm^3

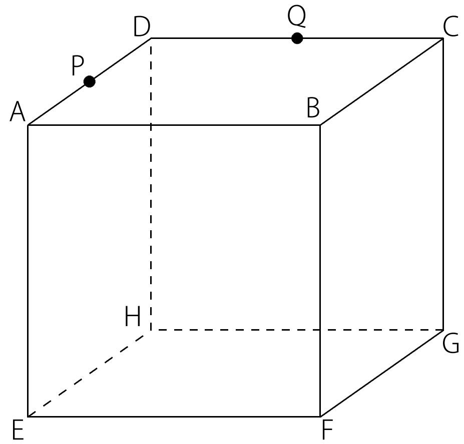
(点Hを含む立体の体積)
＝(大きな三角すいU-STHの体積)ー(小さな三角すい１個分の体積)×3
＝121.5－4.5×3
＝108cm^3

※ 立方体の体積は 6×6×6＝216cm^3 で、点Hを含む立体の体積はちょうど半分の108cm^3 です。
この切断は立方体を同じ立体２個に切り分けています。覚えておきましょう。

例題と解説

例題２

右図は１辺6cmの立方体です。点P，Qはそれぞれ辺の中点です。
この立方体を３点 P，Q，F を通る平面で切り分けます。
このとき次の問に答えなさい。



（１）　右図に切断面をかきなさい。
（２）　切ってできる立体のうち点Hを含む立体の体積を求めなさい。

答え　（１）省略（２）141cm³

[例題２の解説]

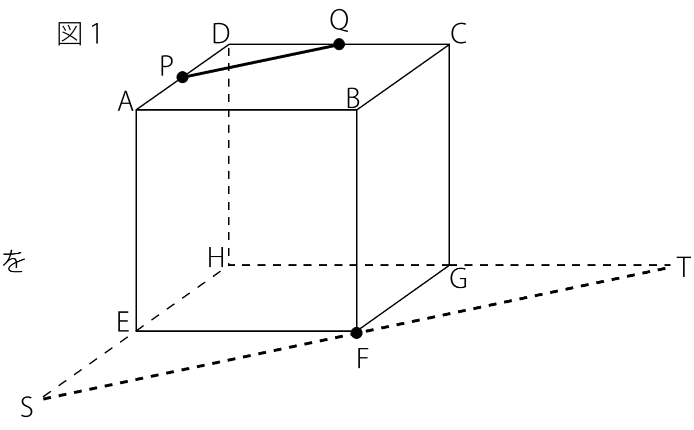
（１）　立体切断ルールは次の２つです。

ルール① 同じ平面上にある点を直線で結ぶ

ルール② 平行な２枚の平面上には平行な切断線を描く

まずルール①にしたがって、PとQを結びます。

図１



次に、面を広げて考えます。
ルール②を利用します。面ABCDと面EFGHの平面は
平行なので、PQと平行な線を点Fを通るように描きます。
この直線と 面AEHDの平面，面CDHGの平面 が交わる点を
それぞれ S，T とします。

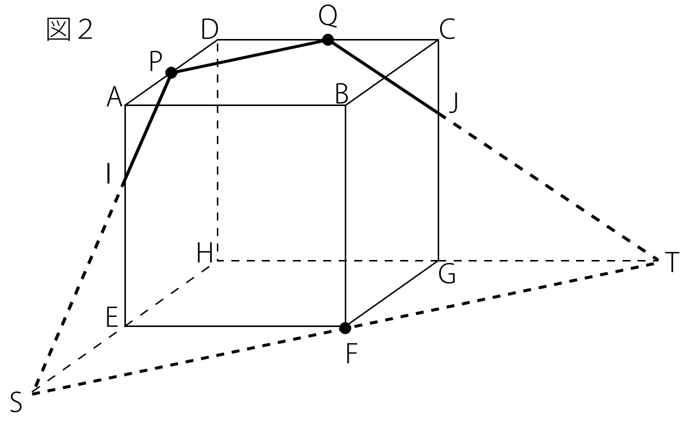
このとき右図１のようになります。
PD：QD＝1：1 なので SH：TH も 1：1 です。

例題と解説

PとS，QとT はそれぞれ同じ平面上にあるので、結びます。

このとき右図２のようになります。

図２

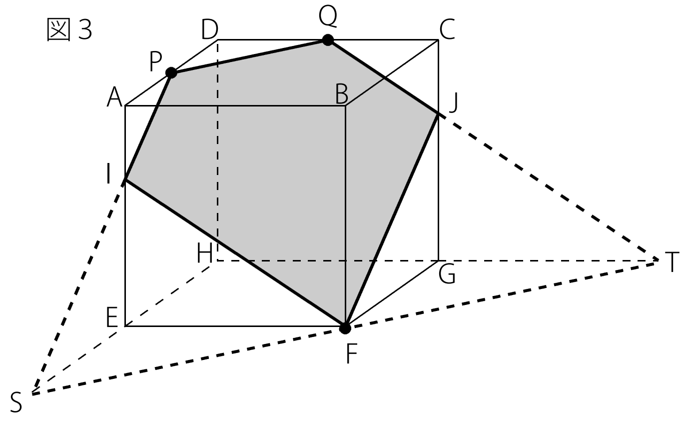


最後に同じ平面上にある IとF，JとF を結んで、切断面の作図が完成です。

切断面は五角形になります。

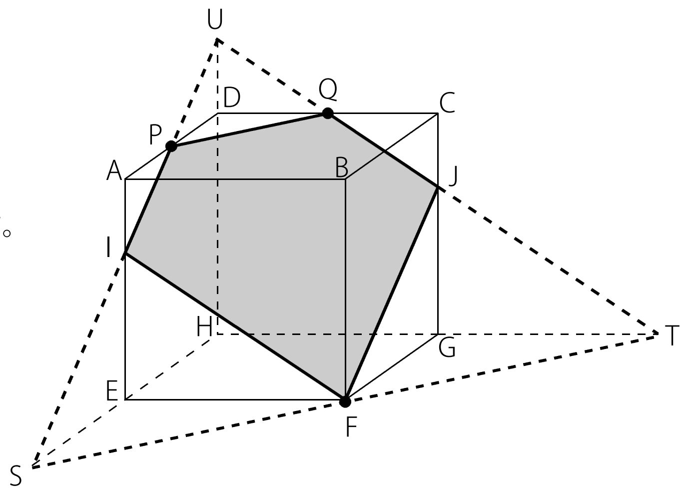
※ 正五角形ではありません。

図３



例題と解説

（２）　直線PIをP方向に延長し、さらに直線QJをQ方向に延長すると、右図のようになります。



求めたい立体は大きな三角すいU-STHから、
三角すいI-SFE，J-FTG，U-PQDを引いてできる立体です。

三角形PQDは直角二等辺三角形で、
三角形PQDと三角形FGTは相似なので、
三角形FGTも直角二等辺三角形です。
よって FG＝TG＝6cm，同様に FE＝SE＝6cm

次に三角形QCJと三角形TGJに着目すると、これらの三角形は相似で、

相似比は QC：TG＝3cm：6cm＝1：2 です。

よって CJ：JG＝1：2 なので JG$=6\times\frac{2}{1+2}=$4cm，CJ＝6－4＝2cm

三角形UDQと三角形JCQは合同なので UD＝2cm

長さを整理すると SH＝TH＝6＋6＝12cm，UH＝UD＋DH＝2＋6＝8cm

(大きな三角すいU-STHの体積)$=12\times12\div2\times8\times\frac{1}{3}=192\text{cm}^3$

(三角すいI-SFEの体積)＝(三角すいJ-FTGの体積)$=6\times6\div2\times4\times\frac{1}{3}=24\text{cm}^3$

(三角すいU-PQDの体積)$=3\times3\div2\times2\times\frac{1}{3}=3\text{cm}^3$

よって (点Hを含む立体の体積)$=192-(24\times2+3)=141\text{cm}^3$

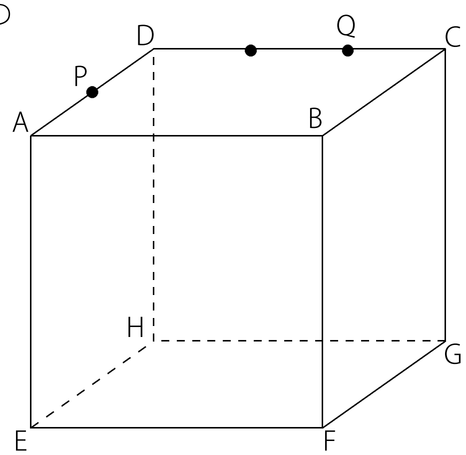
中学受験Unit.41- 3　5年　立体図形３
立方体の切断２

例題と解説

例題３

右図は１辺6cmの立方体です。点Pは辺の中点で、点Qは辺を３等分する点の１つです。この立方体を３点 P，Q，E を通る平面で切り分けます。
このとき次の問に答えなさい。

（1）　右図に切断面をかきなさい。
（2）　切ってできる立体のうち点Hを含む立体の体積を求めなさい。



答え　（1）省略（2）82.5cm³

[例題３の解説]

（1）　PとQ，PとE を結ぶと右図１のようになります。

面ABCDと面EFGHが平行なので、点Eを通るように
面EFGHにPQと平行な線を描きます。

このとき右図２のようになります。

点Sの位置をはっきりとさせるために、
SHの長さを求めておきます。

PQとESは平行です。
言い換えると三角形PQDと三角形ESHが相似であるということです。

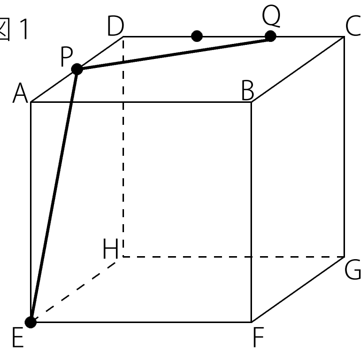
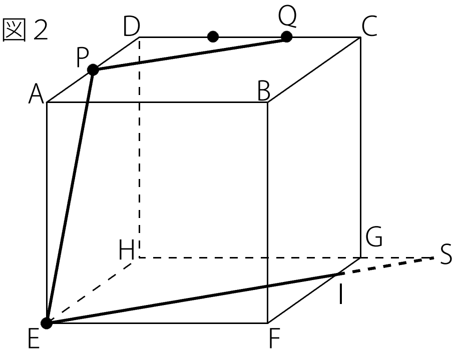
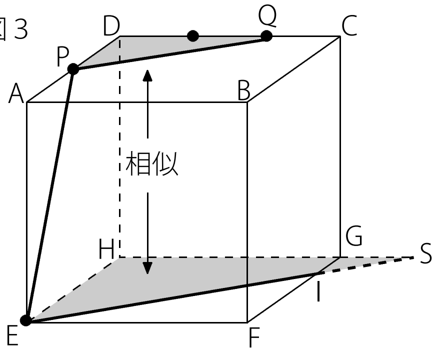
図１


図２


例題と解説

PD＝3cm，QD＝4cm なので PD：QD＝3：4



よって EH：SH＝3：4 です。

EH＝6cm なので SH＝$6\times\frac{4}{3}$＝8cm

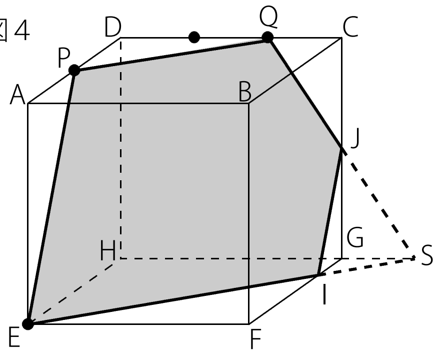
SG＝8－6＝2cm

※ 三角形PQDと三角形IEFも相似です。

※ おおまかに切断面を描くだけであればSHやSGの長さを求める必要はありませんが、立体切断の問題では長さや体積を問われることが多いので、相似を利用して長さを求める方法に慣れておきましょう。

点Sがどのような点であるかがわかったので、切断面を完成させます。

QとSは同じ平面上(面CDHGの平面上)にあるので、結びます。
このときSQとCGが交わる点をJとします。



最後に同じ平面上にあるIとJを結んで完成です。
右図４のようになります。

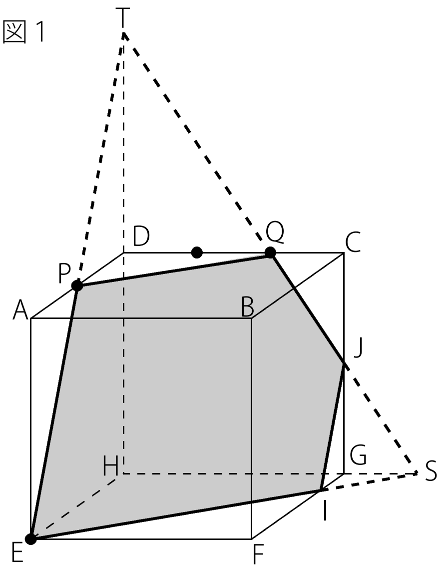
切断面は五角形になります。

例題と解説

（2）　直線PEをP方向に延長し、さらに直線QJをQ方向に延長すると、右図１のようになります。

(1)で求めた通り SH＝8cm，SG＝2cm です。

図１



求めたい立体は大きな三角すいT-ESHから、
三角すいT-PQD，J-ISGを引いてできる立体です。

三角形TEHと三角形TPDは相似で、
相似比は EH：PD＝6cm：3cm＝2：1 です。
よって TH：TD＝2：1 でDHが6cmなので
TH＝6cm×2＝12cm，TD＝6cm です。

三角形QCJと三角形SGJは相似で QC＝SG なので三角形QCJと三角形SGJは合同です。
よって CJ＝JG＝6÷2＝3cm

三角形EHSと三角形IGSは相似で EH：HS＝6cm：8cm＝3：4 なので IG：GS＝3：4 です。
よって IG＝GS×$\frac{3}{4}$＝2cm×$\frac{3}{4}$＝1.5cm

(大きな三角すいT-ESHの体積)＝6×8÷2×12×$\frac{1}{3}$＝96cm^3

(三角すいT-PQDの体積)＝3×4÷2×6×$\frac{1}{3}$＝12cm^3

(三角すいJ-ISGの体積)＝1.5×2÷2×3×$\frac{1}{3}$＝1.5cm^3

よって (点Hを含む立体の体積)＝96−(12＋1.5)＝82.5cm^3

中学受験Unit.41- 3　5年　立体図形３
立方体の切断２

例題と解説

ポイントまとめ

・立体切断ルールは次の２つです。

ルール① 同じ平面上にある点を直線で結ぶ

ルール② 平行な２枚の平面上には平行な切断線を描く

・ルール①でもルール②でも先に進めない場合は立体の「見えていない面」まで広げて考えましょう。