例題と解説

例題１

頂点の数をA，面の数をB，辺の数をC とします。このとき次の立体について A＋B－C を求めなさい。

（１）　立方体

（２）　三角すい

（３）　六角柱

答え　（１）2（２）2（３）2

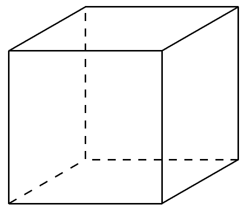
[例題１の解説]

（１）　立方体の頂点の数は８個なので　A＝8

立方体の面の数は６面なので　B=6

立方体の辺の数は12本なので　C＝12

よって A＋B－C=8＋6－12=2

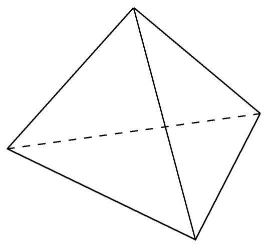


（２）　三角すいの頂点の数は４個なので　A＝4

三角すいの面の数は４面なので　B=4

三角すいの辺の数は６本なので　C=6

よって A＋B－C=4＋4－6=2

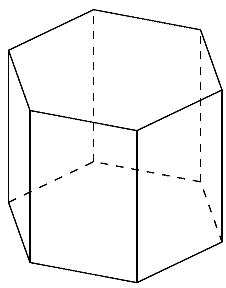


（３）　六角柱の頂点の数は12個なので　A＝12

六角柱の面の数は８面なので　B=8

六角柱の辺の数は18本なので　C=18

よって A＋B－C=12＋8－18=2



穴の開いていない多面体では (頂点の数)＋(面の数)－(辺の数)＝2 という関係が成り立ちます。
この関係を**オイラーの多面体定理**と言います。多面体定理はへこんだ立体でも成り立ちますが、
穴の開い立体では成り立ちません。

例題と解説

例題２

次の（ ア ）〜 （ カ ）にあてはまる数を求めなさい。

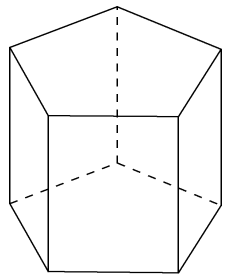
（1）　（ ア ）角柱の辺の数は15本で、面の数は（ イ ）面、頂点の数は（ ウ ）個です。

（2）　（ エ ）角すいの辺の数は（ オ ）本で、面の数は５面、頂点の数は（ カ ）個です。

答え　（1）ア ５，イ ７，ウ 10（2）エ ４，オ ８，カ ５

[例題２の解説]

（1）　○角柱のとき



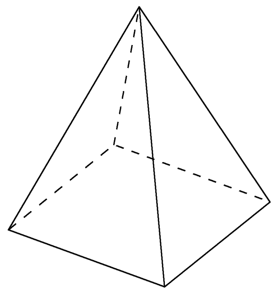
(辺の数)＝○×3，(面の数)＝○+2，(頂点の数)＝○×2 となります。

辺の数が15本のとき ○×3＝15 より ○＝5 なので５角柱です。

面の数は 5+2=7，頂点の数は 5×2＝10 となります。

よって ア＝5，イ＝7，ウ＝10

（2）　○角すいのとき



(辺の数)＝○×2，(面の数)＝○+1，(頂点の数)＝○+1 となります。

面の数が５面のとき ○+1＝5 より ○＝4 なので４角すいです。

辺の数は 4×2＝8，頂点の数は 4+1＝5 となります。

よって エ＝4，オ＝8，カ＝5

※ 式を覚える必要はありません。簡単な角柱や角すいをイメージすれば求められます。

例題と解説

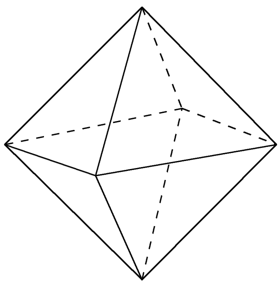
例題３

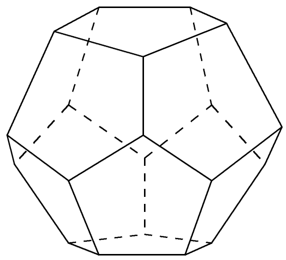
次の立体の頂点の数と辺の数をそれぞれ求めなさい。

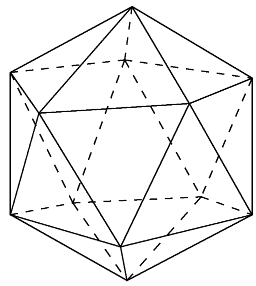
（１）　正八面体
※正三角形が８個

（２）正十二面体
※正五角形が12個

（３）正二十面体
※正三角形が20個







答え　（１）頂点　６個，辺　12本（２）頂点　20個，辺　30本（３）頂点　12個，辺　30本

[例題３の解説]

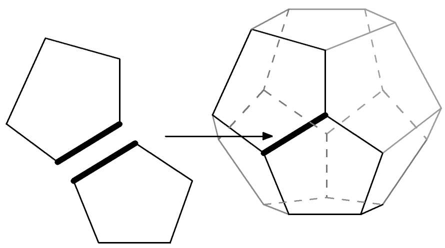
すべての面が合同な正多角形で、すべての頂点の形状が同じ立体を「**正多面体**」と言います。

正多面体は　正四面体，正六面体(立方体)，正八面体，正十二面体，正二十面体　の５種類だけです。

（１）　図を見て数えると正八面体の頂点の数は６個，辺の数は12本です。

※ 面の数は８面なので (頂点の数)＋(面の数)－(辺の数)＝6＋8－12＝2 となり、
多面体定理が成り立っていることがわかります。

（２）　計算で求めます。右図のように**立体のそれぞれの辺は、面の辺どうしがくっついて１本の辺になっています。**

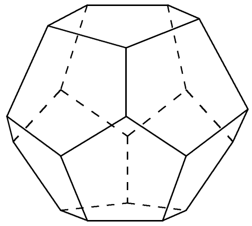


面がばらばらのとき、正五角形が12面なので辺は 5×12＝60(本) です。

２本がくっついて立体の辺になるので、正十二面体の辺は 60÷2＝30(本) であることがわかります。

例題と解説

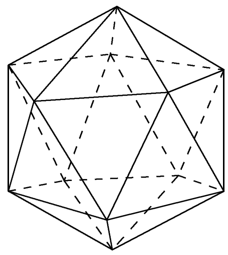
頂点も辺と同じように考えます。
図を見ると、正十二面体のそれぞれの頂点は、面の頂点が３個集まって
できていることがわかります。



正五角形が12面なので、面がばらばらのとき、頂点は 5×12＝60(個) です。
３個の頂点が集まって正十二面体の頂点になるので、
正十二面体の頂点は 60÷3＝20(個) であることがわかります。

※ 正十二面体でも多面体定理が成り立ちます。　(頂点の数)＋(面の数)－(辺の数)＝20＋12－30＝2

（３）　正二十面体は正三角形が20面でできています。
面がばらばらのとき、頂点は全部で 3×20＝60(個) です。
図を見ると正二十面体のそれぞれの頂点は、面の頂点が５個集まって
できていることがわかります。よって頂点の数は 60÷5＝12(個)



面がばらばらのとき、辺は全部で 3×20＝60(本) です。
２本の辺がくっついて、立体の１本の辺になるので、正二十面体の辺は 60÷2＝30(本) です。

※ 正二十面体の面の数は20面で、辺の数は計算で30本だと求めたとします。このとき頂点の数は
オイラーの多面体定理から (頂点の数)＋20－30＝2 なので (頂点の数)＝12(個) と求めることもできます。

正多面体についてまとめておきます。正多面体は以下の５種類のみです。

	正四面体	正六面体(立方体)	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30

(参考)

すべての面が合同な正多角形で、**すべての頂点の形状が同じ**立体を**「正多面体」**と言います。

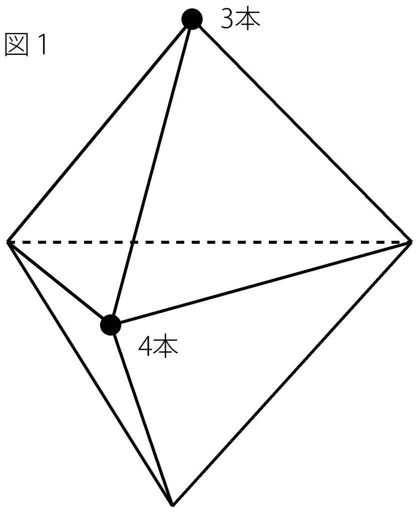
正多面体は５種類のみです。「すべての面が合同な立体」＝「正多面体」　とは限りません。

例えば下図１と下図２の立体はすべての面が合同な立体ですが正多面体ではありません。

なぜなら図１と図２の立体は３本の辺が集まって頂点になっているところと、４本の辺が集まって頂点になっているところがあるので、「すべての頂点の形状が同じ」ではないから正多面体ではありません。

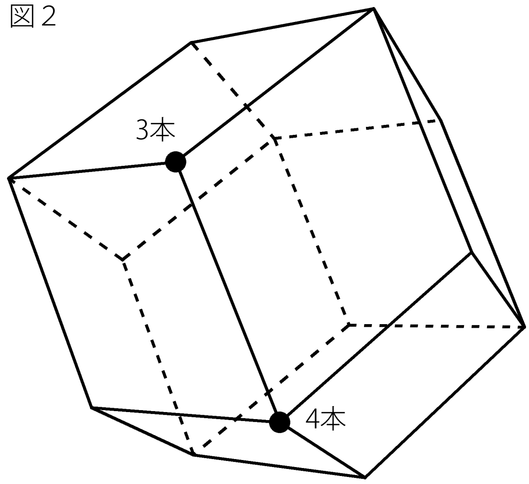
また図２の立体に関しては、そもそも面がひし形なので正多角形ではありません。

図１



正四面体を２つくっつけて立体

図２



すべての面が合同なひし形の十二面体

立体の問題で出題された図を見て「あれ？正多面体っぽいけどこんな正多面体あったっけ？正多面体はあの５種類のはずだけどなぁ…」と悩まないように。すべての面が合同なだけでは正多面体と言えません。

もちろん上図の立体でもオイラーの多面体定理は成り立ちます。

例題と解説

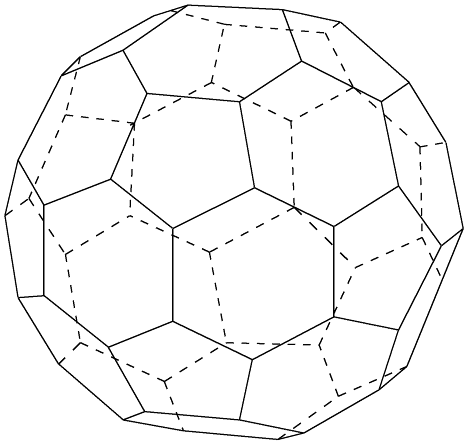
例題４

右図のように正五角形が12個と正六角形が20個でできる立体があります。

この立体について次の問いに答えなさい。

（１）　辺の数を求めなさい。

（２）　頂点の数を求めなさい。



答え　（１）90本（２）60個

[例題４の解説]

（１）　面の辺が２本集まって、立体の１本の辺になっています。正五角形が12個と正六角形が20個でできているので、

面がばらばらのとき、辺は全部で 5×12＋6×20＝180(本) です。

よってこの立体の辺の数は 180÷2＝90(本) であることがわかります。

（２）　図を見るとこの立体の頂点は、面の頂点が３個集まってできていることがわかります。

面がばらばらのとき、頂点は全部で 5×12＋6×20＝180(個) です。

よってこの立体の頂点の数は 180÷3＝60(個) であることがわかります。

(別解)

面の数は 12＋20＝32，辺の数は(1)より90です。

オイラーの多面体定理は (頂点の数)＋(面の数)－(辺の数)＝2 なので、この立体にあてはめると

(頂点の数)＋32－90＝2 となります。よって (頂点の数)＝90＋2－32＝60(個)

※ この立体はサッカーボールと同じ形で、正二十面体の頂点を切り落としてできる立体です。

中学受験Unit.41- 1　5年　立体図形３
立体の性質

例題と解説

ポイントまとめ

・穴の開いていない多面体では (頂点の数)＋(面の数)－(辺の数)＝2 という関係が成り立ちます。
　この関係をオイラーの多面体定理と言います。

・正多面体は 正四面体，正六面体(立方体)，正八面体，正十二面体，正二十面体 の５種類だけです。

・立体のそれぞれの辺は、面の辺どうしがくっついて１本の辺になっています。