中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

例題１

150から360までの整数について次の問いに答えなさい。

（１）　2でも3でも割り切れない整数は全部で何個ありますか。

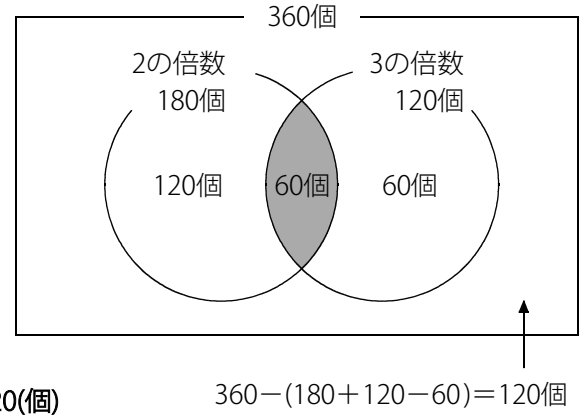
（２）　2でも3でも割り切れない整数で大きい方から15番目の数を求めなさい。

答え（１）70個（２）317

[例題１の解説]

（１）　1から360までで2でも3でも割り切れない整数の個数から
1から149までで2でも3でも割り切れない整数の個数を引いて求めます。

ベン図を利用します。
1から360までについて
(2で割り切れる整数の個数)＝360÷2＝180(個)
(3で割り切れる整数の個数)＝360÷3＝120(個)
2と3の最小公倍数は6なので
(2でも3でも割り切れる整数の個数)＝360÷6＝60(個)
よって
(2でも3でも割り切れない整数の個数)＝360－(180＋120－60)＝**120(個)**



同様に1から149までについても求めます。
(2で割り切れる整数の個数)＝149÷2＝74(個)
(3で割り切れる整数の個数)＝149÷3＝49(個)
(2でも3でも割り切れる整数の個数)＝149÷6＝24(個)
(2でも3でも割り切れない整数の個数)＝149－(74＋49－24)＝**50(個)**

よって150から360までで2でも3でも割り切れない整数は 120－50＝70(個)

(C) 2014 min-san.com

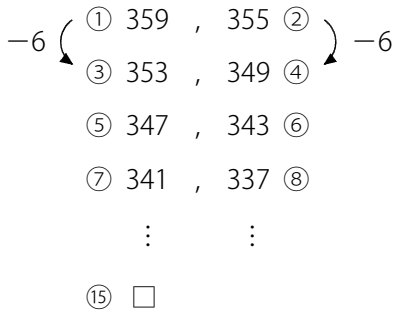
中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

（２）　2と3の最小公倍数は6なので、連続する6個の整数を1つの周期として考えます。
150から360で大きい方から６個の整数は 360，359，358，357，356，355
このうち2でも3でも割り切れない整数は 359，355 の２個です。

2でも3でも割り切れない整数は右図のように359と355から
それぞれ6を引いた数になります。

大きい方から15番目は359の列にあり、①から⑮まで間の数は
(15－1)÷2＝7(個) なので大きい方から15番目は 359－6×7＝317



※「2でも3でも割り切れない」→「2と3の最小公倍数が6だから連続する6個の整数について調べる」
例えば、3でも4でも割り切れない整数について考える場合は
「3でも4でも割り切れない」→「3と4の最小公倍数が12だから連続する12個の整数について調べる」
となります。すぐに引き出せるようにしておきましょう。

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

例題２

（１）　3以上7以下で分母が15の既約分数は全部で何個ありますか。

（２）　3以上7以下で分母が15の既約分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

答え　（１）32個（２）160

[例題２の解説]

（１）　既約分数とは「約分することができない分数」です。

3以上7以下で分母が15なので $\frac{45}{15}$ ～ $\frac{105}{15}$ の61個の分数について既約分数がいくつあるかを考えます。

既約分数について考えるときは、まず分母の素因数分解をします。
15＝3×5 なので分子が3または5の倍数であれば約分ができる分数です。つまり既約分数ではありません。
よって 45～105 の整数のうち、**3でも5でも割り切れない整数の個数を求める**ことが既約分数の個数を求めることになります。

1から105までについて
(3で割り切れる整数の個数)＝105÷3＝35(個)
(5で割り切れる整数の個数)＝105÷5＝21(個)
(3でも5でも割り切れる整数の個数)＝105÷15＝7(個)
(2でも3でも割り切れない整数の個数)＝105－(35＋21－7)＝**56(個)**

1から44までについて
(3で割り切れる整数の個数)＝44÷3＝14(個)
(5で割り切れる整数の個数)＝44÷5＝8(個)
(3でも5でも割り切れる整数の個数)＝44÷15＝2(個)
(2でも3でも割り切れない整数の個数)＝44－(14＋8－2)＝**24(個)**

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

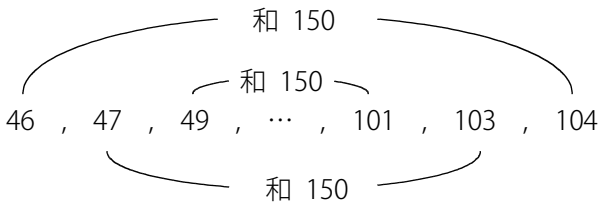
1から105までに3でも5でも割り切れない整数が56個、1から44までに3でも5でも割り切れない整数が24個なので
45から105までに3でも5でも割り切れない整数は 56－24＝32(個) です。

よって3以上7以下で分母が15の既約分数は全部で32個

（２）　45～105のうち3でも5でも割り切れない整数の和を求めて分母の15で割ります。

45～105のうち3でも5でも割り切れない整数は 46，47，49，…，101，103，104

右図のように小さい方から○番目の数と大きい方から
○番目の数の和は150になっていることがわかります。



(1)より全部で32個なので150のペアは 32÷2＝16(個) です。

(45～105のうち3でも5でも割り切れない整数の和)＝150×16＝2400

よって

(3以上7以下で分母が15の既約分数の和)＝$\frac{46}{15}+\frac{47}{15}+\frac{49}{15}+\cdots+\frac{101}{15}+\frac{103}{15}+\frac{104}{15}=\frac{2400}{15}=160$

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

(別解)

$\frac{1}{15}$ ～ $\frac{15}{15}$ で既約分数の和は $\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{7}{15}+\frac{8}{15}+\frac{11}{15}+\frac{13}{15}+\frac{14}{15}=4$

3以上7以下で分母が15の既約分数の和を帯分数で考えます。

$3\frac{1}{15}+3\frac{2}{15}+3\frac{4}{15}+3\frac{7}{15}+3\frac{8}{15}+3\frac{11}{15}+3\frac{13}{15}+3\frac{14}{15}=3\times8+4=24+4=\mathbf{28}$

$4\frac{1}{15}+4\frac{2}{15}+4\frac{4}{15}+4\frac{7}{15}+4\frac{8}{15}+4\frac{11}{15}+4\frac{13}{15}+4\frac{14}{15}=4\times8+4=32+4=\mathbf{36}$

$5\frac{1}{15}+5\frac{2}{15}+5\frac{4}{15}+5\frac{7}{15}+5\frac{8}{15}+5\frac{11}{15}+5\frac{13}{15}+5\frac{14}{15}=5\times8+4=40+4=\mathbf{44}$

$6\frac{1}{15}+6\frac{2}{15}+6\frac{4}{15}+6\frac{7}{15}+6\frac{8}{15}+6\frac{11}{15}+6\frac{13}{15}+6\frac{14}{15}=6\times8+4=48+4=\mathbf{52}$

よって全部の和は 28＋36＋44＋52＝160

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

例題３

（１）　ある分数Aの分母に15を足すと$\frac{7}{11}$になり、分母から15を引くと$\frac{11}{13}$になります。分数Aを求めなさい。

（２）　ある分数Bの分子に4を足すと$\frac{7}{10}$になり、分子から8を引くと$\frac{9}{14}$になります。分数Bを求めなさい。

（３）　ある分数Cの分母に4を足すと$\frac{5}{12}$になり、分子から5を引くと$\frac{5}{16}$になります。分数Cを求めなさい。

答え　（１）$\frac{77}{106}$　（２）$\frac{143}{210}$　（３）$\frac{15}{32}$

[例題３の解説]

（１）　ある分数Aを$\frac{Q}{P}$とします。

$\frac{Q}{P+15}=\frac{7}{11}=\frac{77}{121}$
$\frac{Q}{P-15}=\frac{11}{13}=\frac{77}{91}$
} 分子は変わらないので分子をそろえます。

(P＋15)：(P－15)＝121：91 なので ⑫① と ⑨① とすると ⑫①－⑨①＝㉚　※ このとき Q＝㊼
P＋15 と P－15 の差は30で 30＝㉚ なので ①＝1
P＋15＝⑫①＝1×121 なので P＝121－15＝106 で Q＝㊼＝1×77＝77

よって分数Aは$\frac{77}{106}$

※ この問題では P＋15 と P－15 の差と121と91の差がともに30なので○数字を使わなくても
P＝106 であることにすぐに気付くことができます。

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

（2）　ある分数Bを$\frac{Q}{P}$とします。

$\frac{Q+4}{P}=\frac{7}{10}=\frac{49}{70}$
$\frac{Q-8}{P}=\frac{9}{14}=\frac{45}{70}$
} 分母は変わらないので分母をそろえます。

(Q＋4)：(Q－8)＝49：45 なので ㊾ と ㊺ とすると ㊾－㊺＝④　　※ このとき P＝㊿

Q＋4 と Q－8 の差は12で 12＝④　なので ①＝3

Q＋4＝㊾＝3×49＝147 なので Q＝147－4＝143 で P＝㊿＝3×70＝210

よって分数Bは$\frac{143}{210}$

（3）　ある分数Cを$\frac{Q}{P}$とします。

$\frac{Q}{P+4}=\frac{5}{12}$　… 式１

$\frac{Q-5}{P}=\frac{5}{16}$　… 式２

式１より (P＋4)：Q＝12：5 なので (内項の積)＝(外項の積) より 5×P＋20＝12×Q … 式３

同様に式２より P：(Q－5)＝16：5 なので (内項の積)＝(外項の積) より 5×P＝16×Q－80 … 式４

式３と式４を消去算として解きます。

式４は 5×P＝16×Q－80 なので式３の 5×P を 16×Q－80 に置きかえると 16×Q－80＋20＝12×Q

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

16×Q−80＋20＝12×Q

→ 16×Q−60＝12×Q

→ 4×Q−60＝0

→ 4×Q＝60

よって Q＝60÷4＝15 であることがわかります。

式３は 5×P＋20＝12×Q なので

5×P＋20＝12×15

→ 5×P＋20＝180

→ 5×P＝160

よって P＝160÷5＝32

よって分数Cは$\frac{15}{32}$

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

例題４

ある2けたの整数Aに5を足すと8の倍数になり、3を引くと5の倍数になります。このような整数Aをすべて求めなさい。

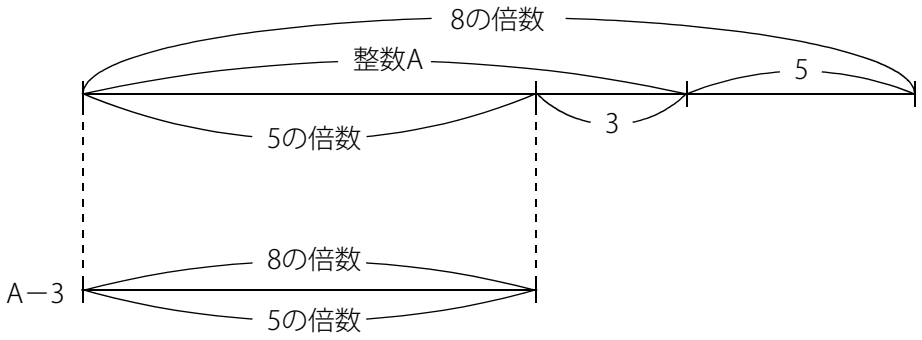
答え　43 , 83

[例題４の解説]

整数Aは2けたの整数であることに注意しましょう。

整数Aに5を足すと8の倍数になり、3を引くと5の倍数になるという関係を図で表すと下図のようになります。

そして 3＋5＝8 で8の倍数から8を引いた数も8の倍数なので A－3 は8の倍数であり、5の倍数でもあることがわかります。



つまり A－3 は8と5の公倍数です。Aは2けたなので A－3 は 40 , 80 が考えられます。

よって A＝43 , 83

※ (○の倍数から○を引いた数)＝(○の倍数) , (○の倍数に○を足した数)＝(○の倍数)

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

(別解)

書き出して整数Aにあてはまる数を求めます。

5を足すと8の倍数になる数　3，11，19，27，35，**43**，51，59，67，75，**83**，91，99，…

3を引くと5の倍数になる数　8，13，18，23，28，33，38，**43**，48，53，58，63，68，73，78，**83**，88，93，98，…

整数Aは2けたなので A＝ 43，83

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

例題５

19734と21735の最大公約数を求めなさい。

答え 69

[例題５の解説]

最大公約数を求めるとき、3の倍数条件などを利用して、右図のような連除法(れんじょほう)を用いるのが一般的ですが、数が大きくなると公約数を見つけるのが難しい場合があります。

連除法

	2	24	36
	2	12	18
	3	6	9
2×2×3＝12		2	3

このような場合に**ユークリッドの互除法(ごじょほう)**という方法を覚えておきましょう。

ユークリッドの互除法では次の性質を利用します。

→ **ある2つの整数AとBの最大公約数は，「AをBで割ったときの余り」とBの最大公約数に等しい**

※ ただしAはBよりも大きいとします。

19734と21735の最大公約数をユークリッドの互除法で求めます。

21735÷19734＝1あまり**2001**　→　(19734と21735の最大公約数) は (19734と2001の最大公約数) に等しい。
19734÷2001＝9あまり**1725**　→　(19734と2001の最大公約数) は (2001と1725の最大公約数) に等しい。
2001÷1725＝1あまり**276**　→　(2001と1725の最大公約数) は (1725と276の最大公約数) に等しい。
1725÷276＝6あまり**69**　→　(1725と276の最大公約数) は (276と69の最大公約数) に等しい。
276÷69＝4あまり**0**　→　割り切れたので (276と69の最大公約数)＝69

よって (19734と21735の最大公約数)＝69

※ つまり19734と21735の公約数は69の約数なので 1，3，23，69 ということになります。

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

例題６

1，9，28，65，91，106，143，168，215 の9個の数の和や差について考えます。このとき次の問いに答えなさい。

（１） 9個の数から2個を選んで、その和を求めます。その和のうち7で割り切れる数は何個ありますか。

（２） 9個の数から2個を選んで、その差を求めます。その差のうち7で割り切れる数は何個ありますか。

答え （１）5個（２）5個

[例題６の解説]

（１） 9個の数をそれぞれ7で割ったときの余りで分類します。

グループA　**7で割り切れる**　…　28，91，168

グループB　**7で割ると1余る**　…　1，106

グループC　**7で割ると2余る**　…　9，65

グループD　**7で割ると3余る**　…　143

グループE　**7で割ると5余る**　…　215

(7の倍数)＋(7の倍数)＝(7の倍数) なのでグループAの2個の数の和は7の倍数です。

よって 28＋91＝**119**，28＋168＝**196**，91＋168＝**259** の3個は7の倍数です。

(7で割ると2余る数)＋(7で割ると5余る数)＝(7の倍数)＋2＋5＝(7の倍数)＋7＝(7の倍数) なので

グループCとグループEの数の和は7の倍数です。

よって 9＋215＝**224**，65＋215＝**280** の2個は7の倍数です。

2つの数の和の場合、7で割り切れる数は全部で 3＋2＝5個 であることがわかります。

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

（２）　(1)で9個の数をそれぞれ7で割って分類しました。

グループA　**7で割り切れる**　　…　28，91，168
グループB　**7で割ると1余る**　　…　1，106
グループC　**7で割ると2余る**　　…　9，65
グループD　**7で割ると3余る**　　…　143
グループE　**7で割ると5余る**　　…　215

(7の倍数)－(7の倍数)＝(7の倍数) なのでグループAの2個の数の差は7の倍数です。
よって 91－28＝**63**，168－28＝**140**，168－91＝**77** の3個は7の倍数です。

(7で割ると1余る数)－(7で割ると1余る数)＝(7の倍数) なのでグループBの2個の数の差は7の倍数です。
よって 106－1＝**105** の1個は7の倍数です。

(7で割ると2余る数)－(7で割ると2余る数)＝(7の倍数) なのでグループCの2個の数の差は7の倍数です。
よって 65－9＝**56** の1個は7の倍数です。

2つの数の差の場合、7で割り切れる数は全部で 3＋1＋1＝5個 であることがわかります。

(C) 2014 min-san.com

中学受験Unit.37-２　5年　数の性質3
約数と倍数

例題と解説

ポイントまとめ

・「2でも3でも割り切れない」→「2と3の最小公倍数が6だから連続する6個の整数について調べる」

・「3でも4でも割り切れない」→「3と4の最小公倍数が12だから連続する12個の整数について調べる」

・既約分数について考えるときは、分母の素因数分解に着目しましょう。

・(○の倍数から○を引いた数)＝(○の倍数)，(○の倍数に○を足した数)＝(○の倍数)

・ユークリッドの互除法では次の性質を利用します。

ある2つの整数AとBの最大公約数は、AをBで割ったときの余りとBの最大公約数に等しい

(C) 2014 min-san.com