中学受験Unit.37-１　5年　数の性質3
約数

例題と解説

例題１

2400の約数をすべて求めなさい。

答え1，2，3，4，5，6，8，10，12，15，16，20，24，25，30，32，40，48，50，60，75，80，96，100
120，150，160，200，240，300，400，480，600，800，1200，2400

[例題１の解説]

約数をすべて求める場合、基本的にはペアで探していきます。

(例)　72の約数をすべて求めなさい。

(1，72)　(2，36)　(3，24)　(4，18)　(6，12)　(8，9)

よって約数は 1，2，3，4，6，8，9，12，18，24，36，72

ただし数が大きくなるにつれてこの方法では数え忘れが出てきてしまいます。

素因数分解を利用する方法を覚えておきましょう。

(2400の素因数分解)＝2×2×2×2×2×3×5×5

このように2400は2が5個と3が1個と5が2個の積で表すことができます。

これをわかりやすく次のように書き表しておきます。2400＝$2^5×3^1×5^2$

※ 2^5であれば「2の5乗(じょう)」と読みます。2^5＝2×2×2×2×2 です。

2は5乗まであるので、1を加えて次のように書きます。　1，2^1，2^2，2^3，2^4，2^5

つまり　1，2，4，8，16，32

3は1乗までなので、1を加えて次のように書きます。　1，3^1

つまり　1，3

5は2乗までなので、1を加えて次のように書きます。　1，5^1，5^2

つまり　1，5，25

次にもれなくかけ合わせていきます。

2 → 1，2，4，8，16，32

3 → 1，3

5 → 1，5，25

1，2，4，8，16，32
1，3
1，5，25
1×1×1=1
1×1×5=5
1×1×25=25

1，2，4，8，16，32
1，3
1，5，25
1×3×1=3
1×3×5=15
1×3×25=75

1，2，4，8，16，32
1，3
1，5，25
2×1×1=2
2×1×5=10
2×1×25=50

上図のように縦に書いて順序よくかけていきます。

1×1×1=1，1×1×5=5，1×1×25=25，1×3×1=3，1×3×5=15，1×3×25=75

2×1×1=2，2×1×5=10，2×1×25=50，2×3×1=6，2×3×5=30，2×3×25=150

4×1×1=4，4×1×5=20，4×1×25=100，4×3×1=12，4×3×5=60，4×3×25=300

8×1×1=8，8×1×5=40，8×1×25=200，8×3×1=24，8×3×5=120，8×3×25=600

16×1×1=16，16×1×5=80，16×1×25=400，16×3×1=48，16×3×5=240，16×3×25=1200

32×1×1=32，32×1×5=160，32×1×25=800，32×3×1=96，32×3×5=480，32×3×25=2400

よって2400の約数は下の36個です。

1，2，3，4，5，6，8，10，12，15，16，20，24，25，30，32，40，48，50，60，75，80，96，100，120，150，160，200，240，300，400，480，600，800，1200，2400

中学受験Unit.37-１　5年　数の性質3
約数

例題と解説

例題２

次の問いに答えなさい。

（１）　360の約数の個数を求めなさい。

（２）　360の約数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

答え　（１）24個（２）1170

[例題２の解説]

（１）　360の約数をすべて書き出します。

1，2，3，4，5，6，8，9，10，12，15，18，20，24，30，36，40，45，60，72，90，120，180，360

よって 24個

(別解)

素因数分解を利用します。

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

2が3個、3が2個、5が1個あります。これらに1を加えてかけると約数の個数を求めることができます。

$(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$(個)

これは約数の求め方と同じ考え方です。

1，2，4，8　　← 4通り

1，3，9　　← 3通り

1，5　　← 2通り

よって $4 \times 3 \times 2 = 24$(通り)

2が 3個		3が 2個		5が 1個		
↓+1		↓+1		↓+1		約数の個数
4	×	3	×	2	＝	24個

※個数だけを求める場合はこの方法を使うようにしましょう。

（２）　$1+2+3+4+5+6+8+9+10+12+15+18+20+24+30+36+40+45+60+72+90+120+180+360=1170$

(別解)

素因数分解を利用します。

$360=2\times2\times2\times3\times3\times5=2^3\times3^2\times5^1$

2は3乗までなので、さらに1を加えて　1＋2＋4＋8＝15

3は2乗までなので、さらに1を加えて　1＋3＋9＝13

5は1乗までなので、さらに1を加えて　1＋5＝6

これらをすべてかけると　15×13×6＝1170　← 360の約数の和

まとめておきます。

ある整数○を素因数分解すると ○＝$A^P\times B^Q\times C^R\times D^S$ … になるとします。

※A，B，C，D，…は素数。

このとき

(○の約数の個数)＝(1＋P)×(1＋Q)×(1＋R)×(1＋S)× …

(○の約数の和)＝$(1+A+A^2+\cdots+A^P)\times(1+B+B^2+\cdots+B^Q)\times(1+C+C^2+\cdots+C^R)\times(1+D+D^2+\cdots+D^S)$ …

(例)

$120=2\times2\times2\times3\times5=2^3\times3^1\times5^1$

(120の約数の個数)＝(1＋3)×(1＋1)×(1＋1)＝16(個)

(120の約数の和)＝(1＋2＋4＋8)×(1＋3)×(1＋5)＝15×4×6＝360

$$\begin{array}{ccccccccc}
2\text{が }3\text{個} & & 3\text{が }1\text{個} & & 5\text{が }1\text{個} & & \\
\downarrow{+1} & & \downarrow{+1} & & \downarrow{+1} & & \text{約数の個数} \\
4 & \times & 2 & \times & 2 & = & 16\text{個}
\end{array}$$

例題と解説

例題3

次の問いに答えなさい。

（1）　360を整数Aで割ると24余ります。このような整数Aは何個ありますか。

（2）　2170を整数Aで割ると10余り、1445を整数Aで割ると5余ります。このような整数Aは何個ありますか。

答え　（1）8個（2）21個

[例題3の解説]

（1）　360÷A＝□＋24

つまり A×□＝336

よって Aは336の約数で24より大きな数です。

336の約数 → 1，2，3，4，6，7，8，12，14，16，21，24，28，42，48，56，84，112，168，336

このうち24より大きな数なので整数Aは 28，42，48，56，84，112，168，336 の8個

※336の約数を求めるときに不安な場合は素因数分解の方法を利用しましょう。

$336=2^4\times3^1\times7^1$

1，2，4，8，16

1，3

1，7

たてに順序よくかけていけばすべて求めることができます。

(別解)

素因数分解を利用して約数の個数を求めます。

$336=2^4\times3^1\times7^1$ より (336の約数の個数)＝(1＋4)×(1＋1)×(1＋1)＝20(個)

24以下の約数は 1，2，3，4，6，7，8，12，14，16，21，24 の12個なので

20－12＝8(個)

（2）　2170÷A＝□＋10，1445÷A＝○＋5

つまり A×□＝2160，A×○＝1440

よって Aは2160と1440の公約数で10より大きな数です。

公約数の個数は最大公約数の約数の個数と同じです。

(公約数の個数)＝(最大公約数の約数の個数)

(2160と1440の最大公約数)＝720

720の約数 → 1，2，3，4，5，6，8，9，10，12，15，16，18，20，24，30，36，40，45，48，60，72，
80，90，120，144，180，240，360，720

720の約数は全部で30個です。

このうち10以下の約数は9個あるので、整数Aは 30－9＝21(個)

(別解)

素因数分解を利用して約数の個数を求めます。

$720=2^4\times3^2\times5^1$ より (720の約数の個数)＝(1＋4)×(1＋2)×(1＋1)＝30(個)

10以下の約数は 1，2，3，4，5，6，8，9，10 の9個なので

30－9＝21(個)

例題と解説

例題４

下のように分母が1080の分数が1080個あります。これらの分数について次の問いに答えなさい。

$\frac{1}{1080}$, $\frac{2}{1080}$, $\frac{3}{1080}$, … , $\frac{1079}{1080}$, $\frac{1080}{1080}$

（１）　約分できない分数の個数を求めなさい。

（２）　約分できない分数をすべて足し合わせるといくつになりますか。

答え　（１）288個（２）144

[例題４の解説]

（１）　約分できない分数、つまり既約分数の個数を求めます。

既約分数は分母と分子が1以外に公約数を持たない分数です。

いくつかの整数が1以外に公約数を持たないことを「互(たが)いに素(そ)」と言います。覚えておきましょう。

1080＝2×2×2×3×3×3×5 なので分子が ２，３，５ の倍数であれば約分できます。

1～1080で2の倍数は 1080÷2＝540(個)

1～1080で3の倍数は 1080÷3＝360(個)

1～1080で5の倍数は 1080÷5＝216(個)

1～1080で2と3の倍数(つまり6の倍数)は 1080÷6＝180(個)

1～1080で2と5の倍数(つまり10の倍数)は 1080÷10＝108(個)

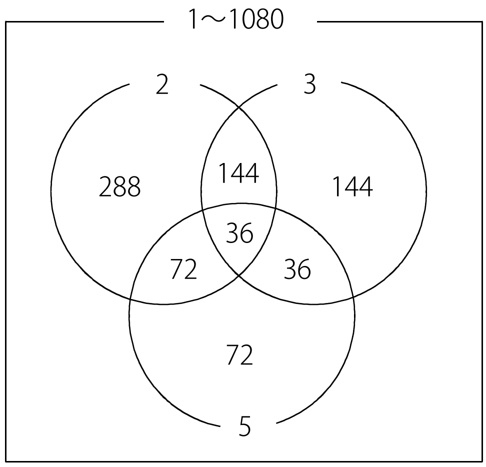
1～1080で3と5の倍数(つまり15の倍数)は 1080÷15＝72(個)

1～1080で2と3と5の倍数(つまり30の倍数)は 1080÷30＝36(個)

ベン図は右のようになります。

よって約分できない分数の個数は

1080－(288＋144＋72＋144＋36＋72＋36)＝288(個)

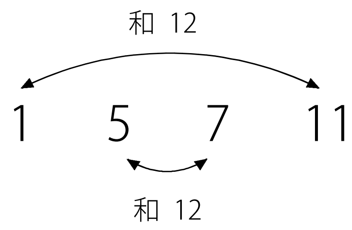


例題と解説

（2）　簡単な数で試してみましょう。

$\frac{1}{12}$〜$\frac{12}{12}$で約分できない分数の和は $\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{11}{12}=\frac{24}{12}=2$ となります。

分子の 1，5，7，11 に着目しましょう。



右図のように2つで1つのペアになって和が12になっていることがわかります。

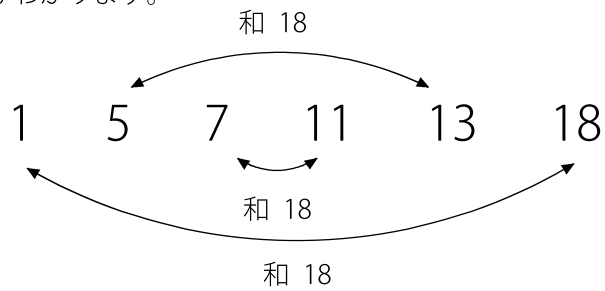
よって $\left(\frac{1}{12}+\frac{11}{12}\right)+\left(\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\right)=1+1=2$ となります。

別の数で試してみましょう。

$\frac{1}{18}$〜$\frac{18}{18}$で約分できない分数の和は $\frac{1}{18}+\frac{5}{18}+\frac{7}{18}+\frac{11}{18}+\frac{13}{18}+\frac{17}{18}=\frac{54}{18}=3$

分子の 1，5，7，11，13，17 に着目しましょう。

右図のように2つで1つのペアになって和が18になっていることがわかります。



よって

$\left(\frac{1}{18}+\frac{17}{18}\right)+\left(\frac{5}{18}+\frac{13}{18}\right)+\left(\frac{7}{18}+\frac{11}{18}\right)=1+1+1=3$

よって約分できない分数は2つ合わせて1になることがわかります。

つまり $\frac{1}{○}$〜$\frac{○}{○}$ のとき (約分できない分数の和)＝(約分できない分数の個数)÷2 となります。

$\frac{1}{1080}$，$\frac{2}{1080}$，$\frac{3}{1080}$，…，$\frac{1079}{1080}$，$\frac{1080}{1080}$ で約分できない分数は288個だったので、その和は 288÷2＝144

例題と解説

例題５

1から100までの整数について次の問いに答えなさい。

（1）　約数の個数が奇数個の整数は何個ありますか。

（2）　約数の個数が偶数個の整数は何個ありますか。

（3）　約数の個数が2個の整数は何個ありますか。

（4）　約数の個数が3個の整数は何個ありますか。

（5）　約数の個数が4個の整数は何個ありますか。

（6）　約数の個数が5個の整数は何個ありますか。

答え　（1）10個（2）90個（3）25個（4）4個（5）32個（6）2個

[例題５の解説]

（1）　約数の個数が1個、3個、5個、… といったように奇数個の整数が何個あるかを考えます。

1から100までの整数で約数の個数が奇数個のものは

1，4，9，16，25，36，49，64，81，100 の10個です。

つまり**約数の個数が奇数個の整数は四角数(平方数)** です。

（2）　1から100までの100個の整数のうち、約数の個数が奇数個の整数は10個なので

約数の個数が偶数個の整数は 100－10＝90(個)

（3）　**約数の個数が2個の整数は素数** です。

よって

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，

73，79，83，89，97 の25個

※ 1は素数ではありません。

（4）　**約数の個数が3個の整数は素数の四角数(平方数)** です。つまり素数の2乗です。

よって 4，9，25，49 の4個　　※次は 11×11＝121 なので100をこえてしまいます。

（5）　どのような数が約数を4個持つのか。大変ですが探して書き出してみましょう。

6，8，10，14，15，21，22，26，27，33，34，35，38，39，46，51，55，57，58，62，65，69，74，77，82，85，86，87，91，93，94，95

よって全部で32個

約数の個数が4個の整数は素数の3乗(立方数)、または異なる2つの素数をかけてできる数 です。

(例)　$2\times2\times2=8$，$3\times3\times3=27$ など

$2\times3=6$，$7\times13=91$ など

（6）　約数の個数が5個の整数は素数の4乗です。

$2\times2\times2\times2=16$

$3\times3\times3\times3=81$

よって2個

まとめておきます。

(約数の個数が奇数個)　→ 四角数

(約数の個数が2個)　→ 素数

(約数の個数が3個)　→ 素数の四角数(平方数)　※つまり素数の2乗

(約数の個数が4個)　→ 素数の3乗、または異なる2つの素数の積

(約数の個数が5個)　→ 素数の4乗

例題と解説

ポイントまとめ

・大きい数の約数をすべて求める場合は素因数分解を利用します。

・ある整数○を素因数分解すると ○＝A^P×B^Q×C^R×D^S … になるとします。

※A，B，C，D，…は素数

(○の約数の個数)＝(1＋P)×(1＋Q)×(1＋R)×(1＋S)× …

(○の約数の和)＝(1＋A＋A^2＋…＋A^P)×(1＋B＋B^2＋…＋B^Q)×(1＋C＋C^2＋…＋C^R)×(1＋D＋D^2＋…＋D^S) …

・$\dfrac{1}{○}$～$\dfrac{○}{○}$ のとき (約分できない分数の和)＝(約分できない分数の個数)÷2

・(約数の個数が奇数個)　→ 四角数

・(約数の個数が2個)　→ 素数

・(約数の個数が3個)　→ 素数の四角数(平方数)　※つまり素数の2乗

・(約数の個数が4個)　→ 素数の3乗(立方数)、または異なる2つの素数の積

・(約数の個数が5個)　→ 素数の4乗