

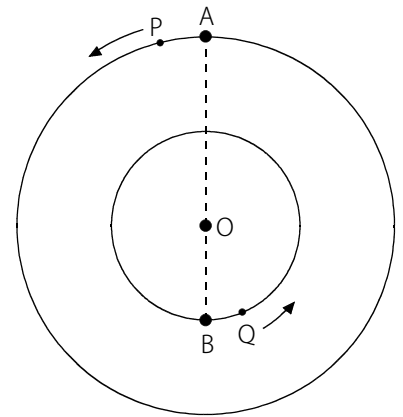


例題と解説

例題1

右図のように点Oを中心とする半径20cmの大円と半径10cmの小円があります。
点PはAを出発して大円の円周上を矢印の向きに秒速15.7cmで回り続けます。点Q
は点Pと同時にBを出発して小円の円周上を矢印の向きに秒速1.57cmで回り続け
ます。このとき次の問いに答えなさい。ただし円周率は3.14とします。

- (1) 点Pは1秒間に点Oを中心として何度回転しますか。
- (2) 点Pと点Qが初めて最も近づくのは出発してから何秒後ですか。
- (3) 点Pと点Qが初めて最も離れるのは出発してから何秒後ですか。
ただし0秒のときは考えません。
- (4) 点Pと点Qが5回目に最も近づくのは出発してから何秒後ですか。



答え (1) 45度 (2) 5秒後 (3) 10秒後 (4) 45秒後

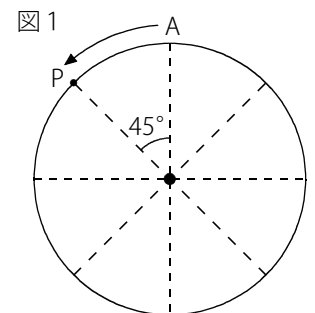
[例題1の解説]

- (1) (大円の円周の長さ) $=20 \times 2 \times 3.14 = 125.6(\text{cm})$

点Pは1秒で15.7cm進むので、その進む長さは1周の $\frac{15.7}{125.6} = \frac{1}{8}$ にあたります。

円の1周は360度なので

右図1のように点Pは1秒間に点Oを中心として $360 \times \frac{1}{8} = 45(\text{度})$ 回転します。



※ ある点が円周上を進むときの速さを角度を用いて表したものを**角速度**といいます。

この問題では点Pは秒速15.7cmで進みますが、角速度は「秒速45度」ということになります。

※ 角速度は時計算でよく使われています。

時計の長針は1分間で $360(\text{度}) \div 60(\text{分}) = 6(\text{度})$ 回転するので、時計の長針の角速度は「分速6度」

時計の短針は1分間で $30(\text{度}) \div 60(\text{分}) = 0.5(\text{度})$ 回転するので、時計の短針の角速度は「分速0.5度」



例題と解説

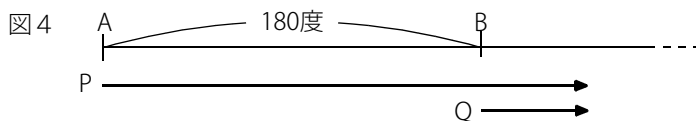
(2) (小円の円周の長さ) $=10 \times 2 \times 3.14 = 62.8(\text{cm})$

点Qは1秒で1.57cm進むので、その進む長さは1周の $\frac{1.57}{62.8} = \frac{1}{40}$ にあたります。

よって点Qは1秒間に点Oを中心として $360 \times \frac{1}{40} = 9(\text{度})$ 回転します。

点Pと点Qが最も近づくのは例えば2点が右図2のように大円の半径の両端に並ぶときです。時計で考えれば長針と短針が重なるときです。

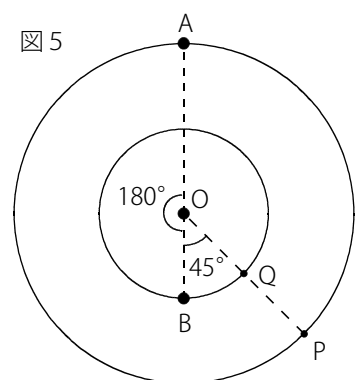
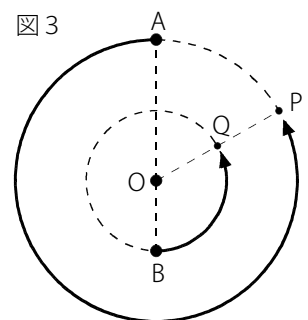
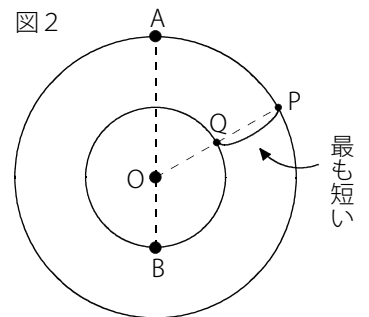
点Pのほうが点Qよりも角速度が速いので点Pが点Qを追いかけます。最初は180度離れているので、右図3のように追いついたとき点Pは点Qよりも180度多く進んでいることがわかります。直線で考えると下図4のような関係になります。



点Pは1秒で45度進み、点Qは1秒で9度進むので、1秒で点Pは点Qに $45 - 9 = 36(\text{度})$ 追いつきます。180度追いついたときに2点が最も近づくので、そのときは出発してから $180 \div 36 = 5(\text{秒後})$ であることがわかります。

※ 5秒で点Pは $45 \times 5 = 225(\text{度})$ 進むので、2点が最も近づいたときの実際の位置関係は図2のような位置ではなく、右図5ようになります。

※ 角速度の問題では時計の長針と短針をイメージしましょう。



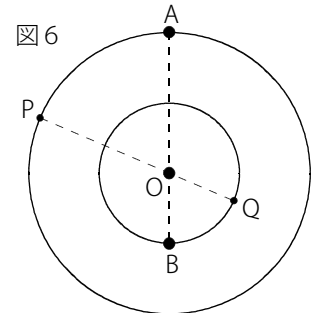


例題と解説

- (3) 点Pと点Qが最も離れるのは例えば2点が大円の直径の両端に並ぶときです。

時計で考えれば長針と短針の作る角度が180度になるときです。

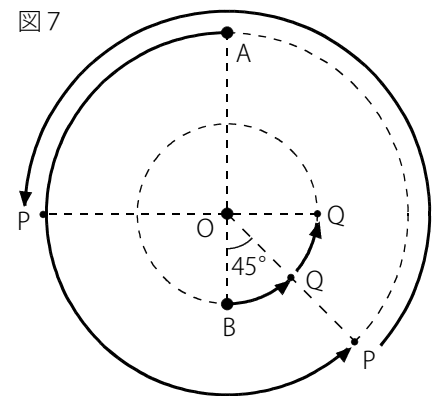
※ 最初(0秒のとき)点PがAに、点QがBにあるときも2点は最も離れた状態です。



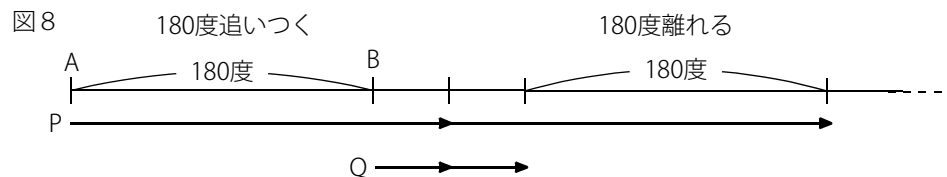
出発してから点Pは点Qよりも180度多く回って(2)で求めたように同じ角度のところに来ます。(長針と短針が重なるような位置)

その後、右図7のように点Pが点Qよりもさらに180度多く回って2点が大円の直径の両端に並びます。

(長針と短針の作る角度が180度になるような位置)



直線で考えると下図8のような関係になります。



まとめると、出発してから2点が大円の直径の両端に並ぶまでに点Pは点Qより $180 + 180 = 360$ (度) 多く回っているので、2点が大円の直径の両端に並ぶのは出発してから $360 \div (45 - 9) = 10$ (秒後) となります。

※ 10秒で点Pは $45 \times 10 = 450$ (度)、点Qは $9 \times 10 = 90$ (度) 進みます。

よって実際は図7で (角AOP) = $450 - 360 = 90$ (度)、(角BOQ) = $9 \times 10 = 90$ (度) となっています。



例題と解説

(4) 最初(1回目)に2点P, Qが最も近づくのは(2)で求めたように出発してから5秒後です。

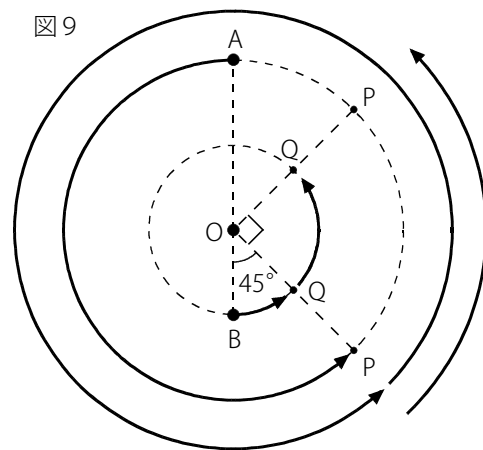
2回目は1回目の状態から点Pが点Qよりも360度多く進んだときです。
このとき右図9のようになります。

この状態になるのは1回目から $360 \div (45 - 9) = 10$ (秒後)

3回目も同様に2回目から10秒後, 4回目も同様に3回目から10秒後

5回目も同様なので点Pと点Qが5回目に最も近づくのは
出発してから $5 + 10 \times (5 - 1) = 45$ (秒後) であることがわかります。

図9



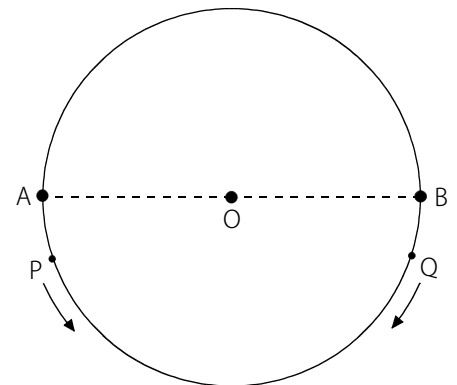


例題と解説

例題2

右図のように点Oを中心とする円があります。点PはAを出発して1周回するのに30秒かかる速さで円周上を反時計回りに回り続けます。点Qは点Pと同時にBを出発して1周回するのに60秒かかる速さで円周上を時計回りに回り続けます。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 角POQが初めて90度になるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 角POQが2回目に90度になるのは出発してから何秒後ですか。
- (3) 角POQが6回目に90度になるのは出発してから何秒後ですか。

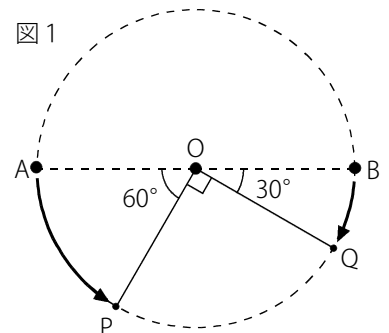


答え (1) 5秒後 (2) 15秒後 (3) 55秒後

[例題2の解説]

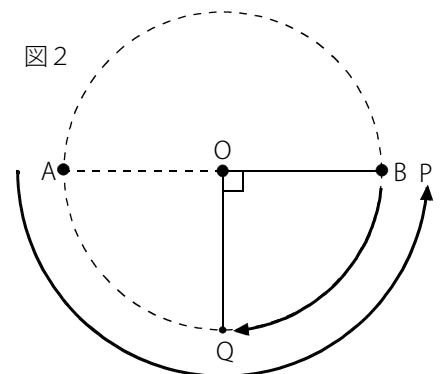
- (1) 点Pは1周(360度)進むのに30秒かかるので (点Pの角速度) $=360 \div 30 = (\text{秒速})12(\text{度})$
点Qは1周(360度)進むのに60秒かかるので (点Qの角速度) $=360 \div 60 = (\text{秒速})6(\text{度})$
最初2点P, Qは180度離れています。
角POQが初めて90度になるときは点Pと点Qが $180 - 90 = 90(\text{度})$ 近づいたときなので $90 \div (12 + 6) = 5(\text{秒後})$ であることがわかります。
このとき右図1のようになります。

図1



- (2) 1回目に90度になる図1の状態から2点P, Qは1秒で合わせて $12 + 6 = 18(\text{度})$ ずつ近づき、合わせて90度進むと点Pと点Qは出会います。
さらに出会ってから2点は1秒で18度ずつ離れていき、合わせて90度進むと角POQは2回目に90度になります。つまり1回目に90度になってから2回目に90度になるまでに2点は合わせて $90 + 90 = 180(\text{度})$ 進めばいいので、角POQが2回目に90度になるのは出発してから $5 + 180 \div (12 + 6) = 15(\text{秒後})$ このとき右図2のようになります。

図2





例題と解説

(別解)

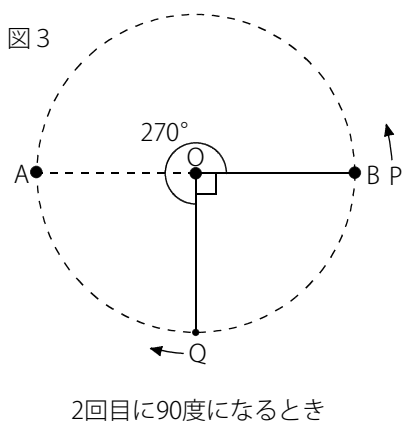
角POQが2回目に90度になるのは、2点P, Qが合わせて180度進んで出会った後で

さらに2点P, Qが合わせて90度進んだときです。

つまりまとめると最初の状態から2点P, Qが合わせて $180+90=270$ (度) 進んでいます。

よって角POQが2回目に90度になるのは出発してから $270 \div (12+6)=15$ (秒後) となります。

- (3) 下図3のように角POQが2回目に90度になったとき、2点は出会う方向に $360-90=270$ (度) 離れています。
この状態から2点が合わせて $270-90=180$ (度) 進むと下図4のように角POQが3回目に90度になります。



2点P, Qが合わせて
180度進む

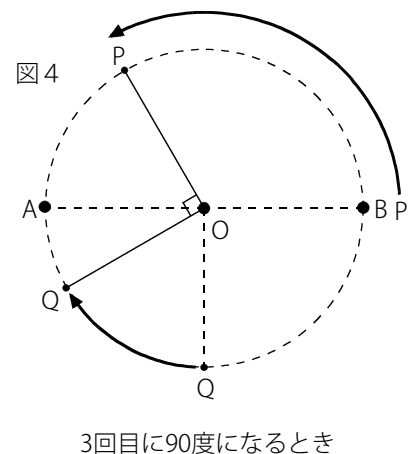


図4の状態から2点が合わせて90度進むと出会い、さらに90度離れると角POQが4回目に90度になります。

つまり図4の状態から2点が合わせて $90+90=180$ (度) 進むと角POQが4回目に90度になります。

整理すると1回目に角POQが90度になってからは $180 \div (12+6)=10$ (秒) ごとに角PQQが90度になります。

よって角POQが6回目に90度になるのは出発してから $5+10 \times (6-1)=55$ (秒後) であることがわかります。

※ 1回目を求めて、その後は10秒ごとに90度になるという周期性を利用しています。

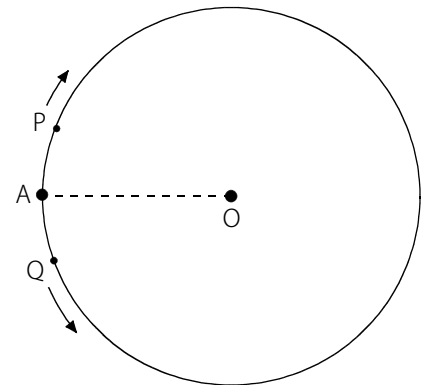


例題と解説

例題3

右図のように周りの長さが72cmの点Oを中心とする円があります。点PはAを出発して秒速4cmで円周上を時計回りに回り続けます。点Qは点Pと同時にAを出発して秒速2cmで円周上を反時計回りに回り続けます。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 点Pと点Qが初めて最も離れるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 三角形APQが初めて直角三角形になるのは出発してから何秒後ですか。
- (3) 三角形APQが2回目に直角三角形になるのは出発してから何秒後ですか。
- (4) 三角形APQが3回目に直角三角形になるのは出発してから何秒後ですか。



答え (1) 6秒後 (2) 6秒後 (3) 9秒後 (4) 27秒後

[例題3の解説]

- (1) 1周72cmの円周上を点Pは秒速4cmで進むので1秒で1周の $\frac{4}{72} = \frac{1}{18}$ だけ回ります。

よって (点Pの角速度) = $360 \times \frac{1}{18}$ = (秒速)20(度)

1周72cmの円周上を点Qは秒速2cmで進むので1秒で1周の $\frac{2}{72} = \frac{1}{36}$ だけ回ります。

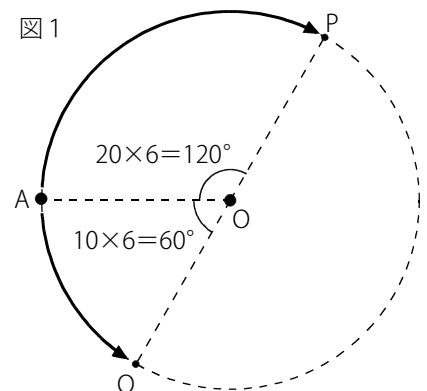
よって (点Qの角速度) = $360 \times \frac{1}{36}$ = (秒速)10(度)

同じ円周上の2点が最も離れるとき、その2点は円の直径の長さ分だけ離れています。このとき2点を結ぶ直線は円の中心を通ります。

よって右図1のように点Pと点Qが初めて最も離れるのは2点がOを中心として180度離ればよいということがわかります。

点Pと点Qは1秒で $20 + 10 = 30$ (度) 離れるので

点Pと点Qが初めて最も離れるのは出発してから $180 \div 30 = 6$ (秒後)



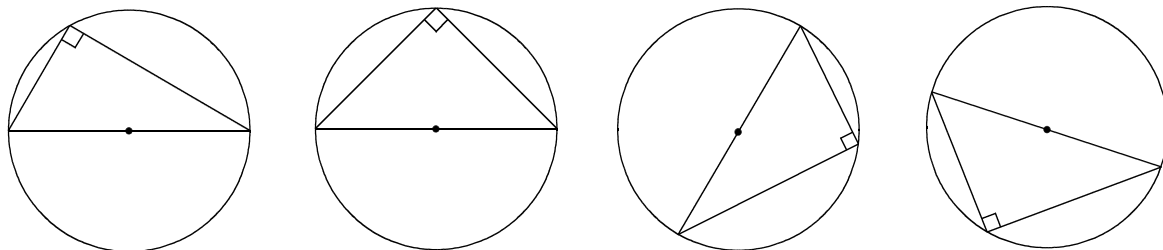


例題と解説

- (2) 円周上の3点を結んでできる三角形は円の中にぴったりと入っているの、このような三角形を円に^{ないせつ}内接する三角形と言います。

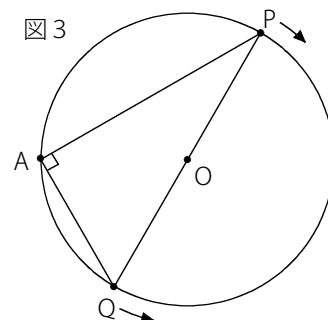
下図2のように円に内接する三角形が直角三角形になるとき、三角形の1辺は円の直径の長さと等しくなります。
つまり円に内接する三角形が直角三角形になるとき、三角形の1辺は円の中心を通ります。

図2



三角形APQが初めて直角三角形になるのは右図3のように
辺PQの長さが円の直径と等しくなるときなので
(1)と同様に $180 \div (20 + 10) = 6$ (秒後)

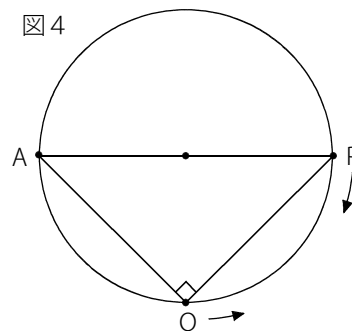
図3



- (3) 点Pのほうが点Qよりも角速度が速いので2回目は右図4のように
辺APの長さが直径と等しくなるときです。

このとき点Pは出発してから180度進んでいるので
 $180 \div 20 = 9$ (秒後) であることがわかります。

図4



※ このとき点Qは90度進んでいるので点Qは弧APの真ん中に来ています。
よって三角形APQは直角二等辺三角形になっています。



例題と解説

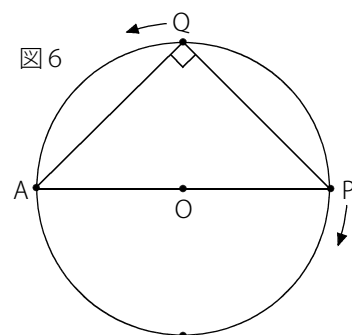
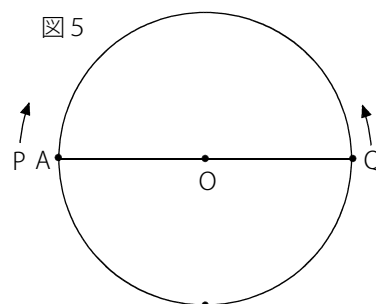
- (4) 次に1辺の長さが直径と等しくなるのは右図5のように点Qが
出発してから180度進んで辺AQの長さが直径と等しくなるときです。
ただしこのときは点Pが1周してAにもどってくるのでAPQは
1本の直線になっていて三角形ではありません。

このときは点Qが出発してから180度進んでいるので $180 \div 10 = 18$ (秒後)

このあと点Pがさらに180度進むと右図6のようになり、
三角形APQは3回目に直角三角形になります。

図5の状態から点Pが180度進んでいるので
図5の状態の $180 \div 20 = 9$ (秒後)

よって3回目に三角形APQが直角三角形になるのは
出発してから $18 + 9 = 27$ (秒後)





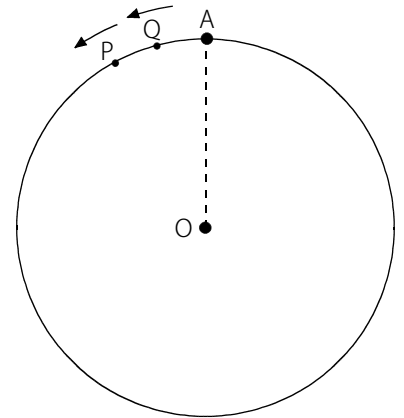
例題と解説

例題4

右図のように周りの長さが120cmの点Oを中心とする円があります。2点 P, Q は同時にAを出発し、それぞれ矢印の向きに円周上を回り続けます。2点 P, Q のそれぞれの点の速さは秒速5cm, 秒速4cmです。

このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 三角形APQが初めて正三角形になるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 三角形APQが7回目に正三角形になるのは出発してから何秒後ですか。



答え (1) 80秒後 (2) 440秒後

[例題4の解説]

$$(1) \quad (\text{点Pの角速度}) = 360 \times \frac{5}{120} = (\text{秒速})15(\text{度}), \quad (\text{点Qの角速度}) = 360 \times \frac{4}{120} = (\text{秒速})12(\text{度})$$

三角形APQが正三角形になるのは右図1, 2の2つの場合が考えられます。

図1の場合を考えます。

点Pが図1の位置に初めて来るのは $120 \div 15 = 8(\text{秒後})$

その後は $360 \div 15 = 24(\text{秒})$ ごとに点Pはこの位置に来ます。

点Qが図1の位置に初めて来るのは $240 \div 12 = 20(\text{秒後})$

その後は $360 \div 12 = 30(\text{秒})$ ごとに点Qはこの位置に来ます。

点Pが図1の位置に来る時間(秒後) 8, 32, 56, **80**, 104, 128, ...

点Qが図1の位置に来る時間(秒後) 20, 50, **80**, 110, 140, 170, ...

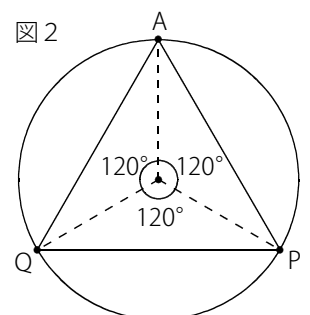
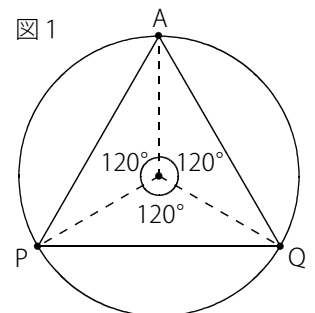




図2の場合を考えます。

点Pが図2の位置に初めて来るのは $240 \div 15 = 16$ (秒後)

その後は $360 \div 15 = 24$ (秒) ごとに点Pはこの位置に来ます。

点Qが図2の位置に初めて来るのは $120 \div 12 = 10$ (秒後)

その後は $360 \div 12 = 30$ (秒) ごとに点Qはこの位置に来ます。

点Pが図2の位置に来る時間(秒後) 16, 40, 64, 88, 112, 136, **160**, 184, …

点Qが図2の位置に来る時間(秒後) 10, 40, 70, 100, 130, **160**, 190, …

2点が初めて図1の位置に来るのは出発してから80秒後、図2の位置に来るのは出発してから160秒後なので
初めて三角形APQが正三角形になるのは出発してから80秒後であることがわかります。

- (2) 点Pは1周するのに $360 \div 15 = 24$ (秒)、点Qは1周するのに $360 \div 12 = 30$ (秒) かかります。

出発してから80秒後に2点が初めて図1の位置に来て、その後は24と30の最小公倍数の120秒ごとに
図1の位置に来るので、三角形APQが図1のような正三角形になるのは 80, 200, 320, 440秒後, …

出発してから160秒後に2点が初めて図2の位置に来て、その後は24と30の最小公倍数の120秒ごとに
図2の位置に来るので、三角形APQが図2のような正三角形になるのは 160, 280, 400, 520秒後, …

まとめると三角形APQが正三角形になるのは出発してから 80, 160, 200, 280, 320, 400, 440秒後, …
なので三角形APQが7回目に正三角形になるのは出発してから440秒後であることがわかります。

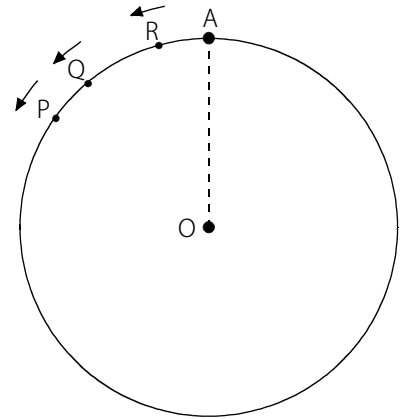


例題と解説

例題 5

右図のように周りの長さが180cmの点Oを中心とする円があります。3点 P, Q, R は同時にAを出発し、それぞれ矢印の向きに円周上を回り続けます。3点 P, Q, R のそれぞれの点の速さは秒速18cm, 秒速15cm, 秒速3cmです。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 三角形PQRが初めて正三角形になるのは出発してから何秒後ですか。
- (2) 三角形PQRが5回目に正三角形になるのは出発してから何秒後ですか。



答え (1) 20秒後 (2) 140秒後

[例題 5 の解説]

$$(1) \quad (\text{点Pの角速度}) = 360 \times \frac{18}{180} = (\text{秒速})36(\text{度}), (\text{点Qの角速度}) = 360 \times \frac{15}{180} = (\text{秒速})30(\text{度})$$

$$(\text{点Rの角速度}) = 360 \times \frac{3}{180} = (\text{秒速})6(\text{度})$$

3点が円周上動く場合は1つの点を動かさないように固定して考えるとわかりやすくなります。

この問題の場合は最もおそい点Rを止めて考えます。

点Rの角速度は秒速6度なので

点Rを止めて考えるということは点Rの速さを秒速6度おそくします。

このとき点Pと点Qも角速度を秒速6度だけおそくします。

つまり

点Pは $36 - 6 = (\text{秒速})30(\text{度})$ で進み、点Qは $30 - 6 = (\text{秒速})24(\text{度})$ で進むことになります。



例題と解説

点Rは動かないのでAの位置にRがあるとするとき三角形PQRが正三角形になるのは右図1,2の2つの場合が考えられます。

点Pが図1の位置に初めて来るのは $120 \div 30 = 4$ (秒後)

その後は $360 \div 30 = 12$ (秒) ごとに点Pはこの位置に来ます。

点Qが図1の位置に初めて来るのは $240 \div 24 = 10$ (秒後)

その後は $360 \div 24 = 15$ (秒) ごとに点Qはこの位置に来ます。

点Pが図1の位置に来る時間(秒後) 4, 16, 28, **40**, 52, 64, ...

点Qが図1の位置に来る時間(秒後) 10, 25, **40**, 55, 70, 85, ...

点Pが図2の位置に初めて来るのは $240 \div 30 = 8$ (秒後)

その後は $360 \div 30 = 12$ (秒) ごとに点Pはこの位置に来ます。

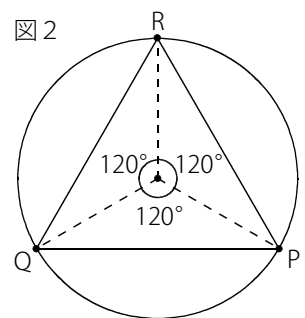
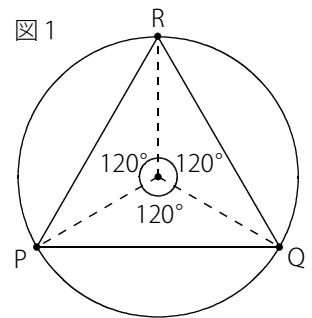
点Qが図2の位置に初めて来るのは $120 \div 24 = 5$ (秒後)

その後は $360 \div 24 = 15$ (秒) ごとに点Qはこの位置に来ます。

点Pが図2の位置に来る時間(秒後) 8, **20**, 32, 44, 56, 68, **80**, 92, ...

点Qが図2の位置に来る時間(秒後) 5, **20**, 35, 50, 65, **80**, 95, ...

2点が初めて図1の位置に来るのは出発してから40秒後、図2の位置に来るのは出発してから20秒後なので初めて三角形PQRが正三角形になるのは出発してから20秒後であることがわかります。





(2) 点Rを止めて考えるので (点Pの角速度) $=36-6=(\text{秒速})30(\text{度})$, (点Qの角速度) $=30-6=(\text{秒速})24(\text{度})$ です。

このとき点Pは1周するのに $360 \div 30 = 12(\text{秒})$, 点Qは1周するのに $360 \div 24 = 15(\text{秒})$ かかります。

出発してから40秒後に2点が初めて図1の位置に来て、その後は12と15の最小公倍数の60秒ごとに図1の位置に来るので、三角形PQRが図1のような正三角形になるのは 40, 100, 160, 220秒後, ...

出発してから80秒後に2点が初めて図2の位置に来て、その後は12と15の最小公倍数の60秒ごとに図2の位置に来るので、三角形PQRが図2のような正三角形になるのは 20, 80, 140, 200, 260秒後, ...

まとめると三角形PQRが正三角形になるのは出発してから 20, 40, 80, 100, 140, 160, 200, 220秒後, ...
なので三角形PQRが5回目に正三角形になるのは出発してから140秒後であることがわかります。

ポイントまとめ

- ・ある点が円周上を進むときの速さを角度を用いて表したものを**角速度**といいます。
- ・円周上の3点を結んでできる三角形を**円に内接する三角形**といいます。
- ・円に内接する三角形が直角三角形になるとき、三角形の1辺は円の直径の長さと等しくなります。
- ・3点が円周上動く場合は1つの点を動かさないように固定して考えるとわかりやすくなります。