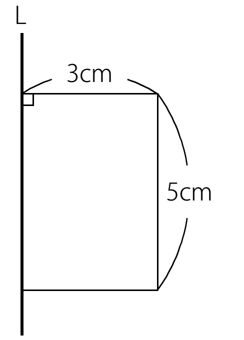
中学受験Unit.32- 1　5年　立体図形２
回転体基礎

例題と解説

例題１

右図のような長方形を直線Lを軸に1回転させたときにできる立体について次の問いに答えなさい。

ただし円周率は3.14とします。



（１）　この立体の体積は何cm^3ですか。

（２）　この立体の表面積は何cm^2ですか。

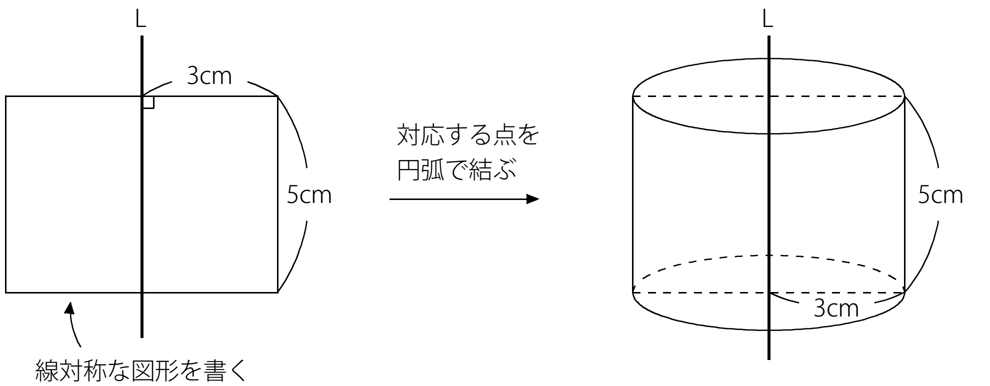
答え（１）141.3cm^3（２）150.72cm^2

[例題１の解説]

（１）　図形を回転させてできる立体を**回転体**と呼びます。

回転体を作図するときは図１のように軸を中心とした線対称な図形を書き、対応する点を円弧で結びます。

図１



回転させてできる立体は上図のように底面の円の半径が3cmで高さが5cmの円柱になります。

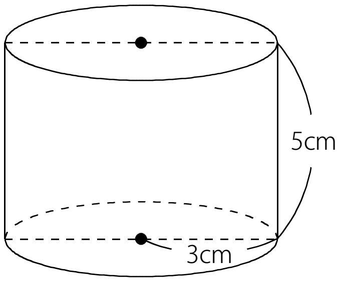
よって (体積)＝3×3×3.14×5＝45×3.14＝141.3(cm^3)

※ 円周率をあつかう場合はできるだけまとめて計算しましょう。

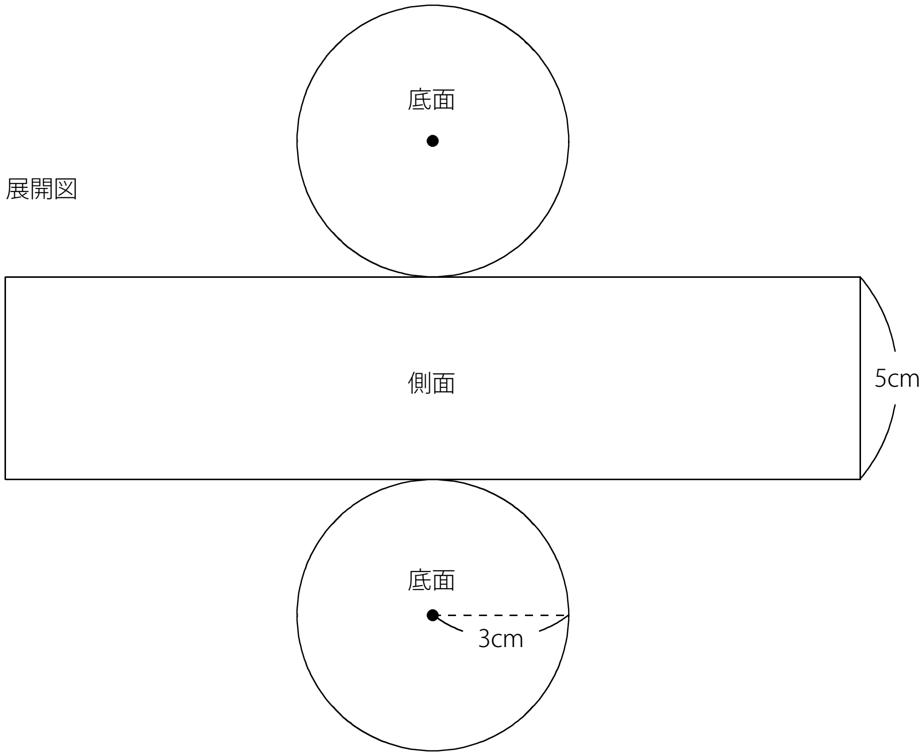
例題と解説

（２）　表面積は展開図の面積です。

図２



展開図



展開図は底面が2つと側面の長方形が1つです。

(底面積)×2＝(3×3×3.14)×2＝18×3.14

側面の横の長さは底面の円の円周の長さの等しく (側面の横の長さ)＝3×2×3.14＝6×3.14

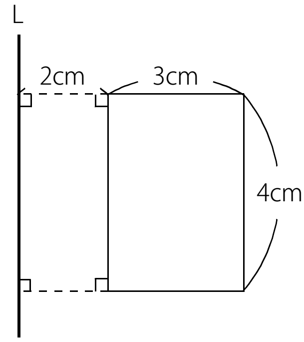
(側面積)＝5×6×3.14＝30×3.14

よって (表面積)＝18×3.14＋30×3.14＝48×3.14＝150.72(cm^2)

例題と解説

例題２

右図のような長方形を直線Lを軸に1回転させたときにできる立体について次の問いに答えなさい。
ただし円周率は3.14とします。



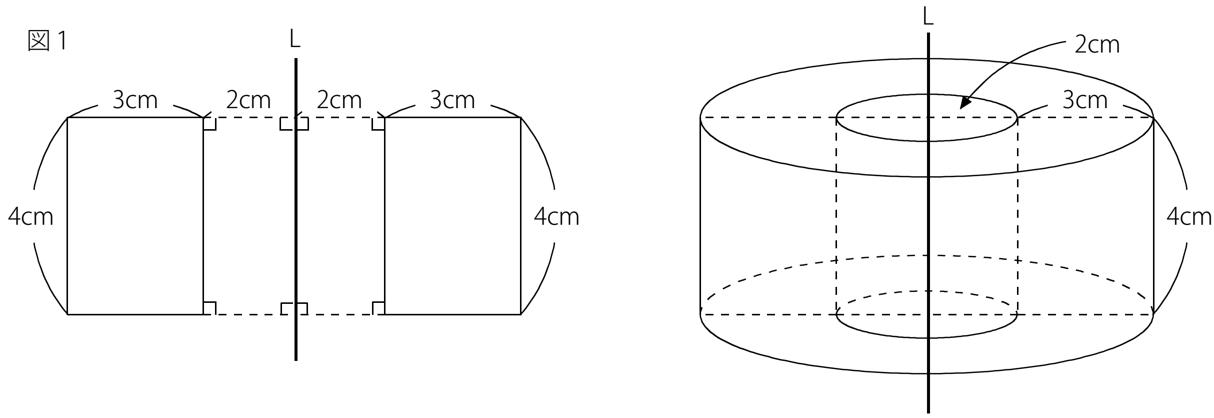
（１）　この立体の体積は何cm^3ですか。
（２）　この立体の表面積は何cm^2ですか。

答え（１）263.76cm^3（２）307.72cm^2

[例題２の解説]

（１）　回転させてできる立体は図１のようになります。

図１

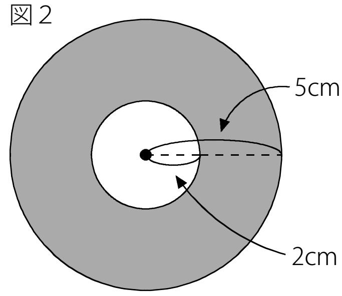


回転させてできる立体は半径5cmで高さ4cmの大きな円柱から半径2cmで高さ4cmの小さな円柱をくりぬいてできる立体です。
(体積)＝5×5×3.14×4－2×2×3.14×4＝100×3.14－16×3.14＝84×3.14＝263.76(cm^3)

（２）　上と下の2つの底面は図２のようなドーナツ型です。

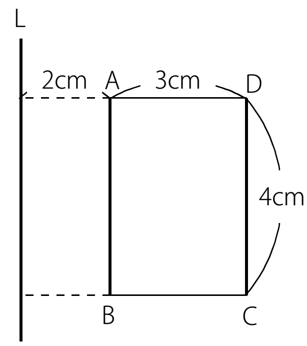
(底面積)×2＝(5×5×3.14－2×2×3.14)×2＝**42×3.14**

図２



側面は図３で辺ABが作る側面(長方形)と辺CDが作る側面(長方形)の2つです。

図３



(辺ABが作る側面の横の長さ)＝(半径2cmの円の円周の長さ) なので

(辺ABが作る側面の横の長さ)＝2×2×3.14＝4×3.14

よって (辺ABが作る側面の面積)＝4×3.14×4＝**16×3.14**

(辺CDが作る側面の横の長さ)＝(半径5cmの円の円周の長さ) なので

(辺CDが作る側面の横の長さ)＝5×2×3.14＝10×3.14

よって (辺CDが作る側面の面積)＝10×3.14×4＝**40×3.14**

よって (表面積)＝42×3.14＋16×3.14＋40×3.14＝98×3.14＝307.72(cm^2)

※ 98×3.14＝3.14×100－3.14×2＝314－6.28＝307.72 と計算する方法もあります。

※ 回転体の側面を見落とさないように注意しましょう。

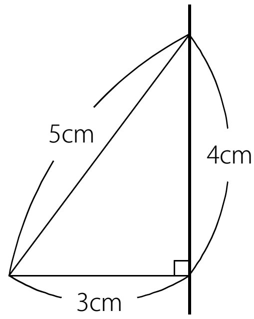
中学受験Unit.32- 1　5年　立体図形２
回転体基礎

例題と解説

例題３

右図のような直角三角形を直線Lを軸に1回転させたときにできる立体について次の問いに答えなさい。

ただし円周率は3.14とします。



（１）　この立体の体積は何cm^3ですか。

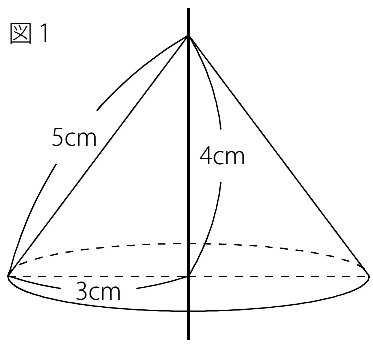
（２）　この立体の表面積は何cm^2ですか。

答え（１）37.68cm^3（２）75.36cm^2

[例題３の解説]

（１）　回転させてできる立体は右図１のように円すいになります。

図１



(円すいの体積)

$=(\text{底面積})\times(\text{高さ})\times\frac{1}{3}$

$=3\times3\times3.14\times4\times\frac{1}{3}$

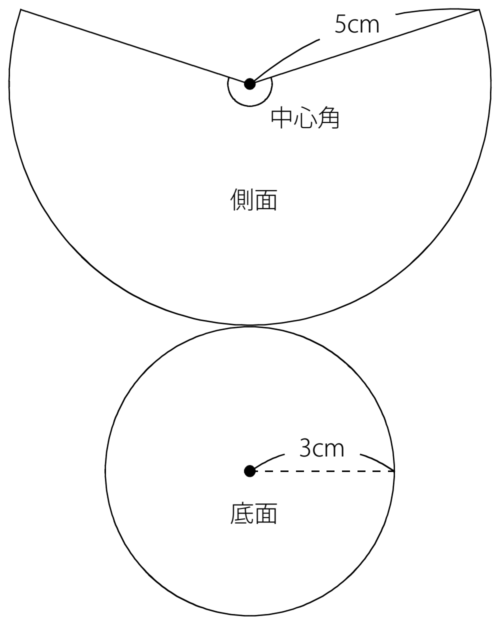
$=12\times3.14$

$=37.68(cm^3)$

例題と解説

（２）　この円すいの展開図は右図２のようになります。
円すいでは側面の弧の長さと底面の円の円周の長さが
等しいことから、側面の中心角を求めることができます。

図２



(側面の中心角)＝□(度)　とすると

(側面の弧の長さ)$=5\times2\times3.14\times\frac{□}{360}=10\times3.14\times\frac{□}{360}$

(底面の円の円周の長さ)$=3\times2\times3.14=6\times3.14$

$10\times3.14\times\frac{□}{360}=6\times3.14$　なので　$10\times\frac{□}{360}=6$

$□=360\times\frac{6}{10}=216$(度)

(側面積)$=5\times5\times3.14\times\frac{216}{360}=$**15×3.14**

(底面積)$=3\times3\times3.14=$**9×3.14**

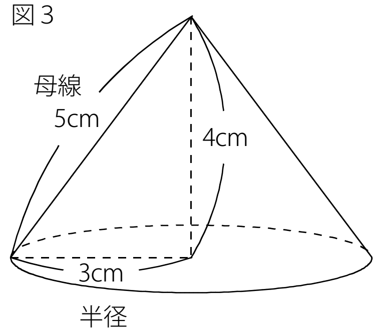
よって　(表面積)$=15\times3.14+9\times3.14=24\times3.14=75.36$($cm^2$)

例題と解説

(別解)

円すいでは $\dfrac{\text{半径}}{\text{母線}}=\dfrac{\text{中心角}}{360}$ が成り立ちます。

図３



(側面積)

$=5\times5\times3.14\times\dfrac{\text{中心角}}{360}$

$=5\times5\times3.14\times\dfrac{\text{半径}}{\text{母線}}$

$=5\times5\times3.14\times\dfrac{3}{5}$

$=15\times3.14$

(底面積)＝3×3×3.14＝9×3.14

よって (表面積)＝15×3.14＋9×3.14＝24×3.14＝75.36(cm^2)

※ $\dfrac{\text{半径}}{\text{母線}}=\dfrac{\text{中心角}}{360}$ の公式を使えば中心角を求めずに側面積を求めることができます。

※ この公式をもとに側面積を整理すると

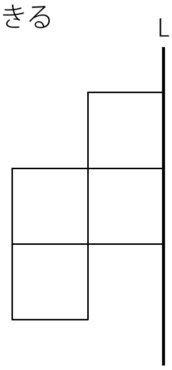
(円すいの側面積)＝(母線)×(母線)×(円周率)×$\dfrac{\text{半径}}{\text{母線}}$ より

(円すいの側面積)＝(母線)×(半径)×(円周率) という式が成り立ちます。

例題と解説

例題４

右図のように1辺2cmの正方形を4つ組み合わせた図形を直線Lを軸に1回転させたときにできる立体について次の問いに答えなさい。ただし円周率は3.14とします。



（１）　この立体の体積は何cm³ですか。

（２）　この立体の表面積は何cm²ですか。

答え（１）200.96cm³（２）251.2cm²

[例題４の解説]

（１）　回転させてできる立体は右図１のようになります。
ドーナツ型の穴の空いた円柱の穴の部分に半径2cmで高さ4cmの円柱が2cmだけ入っているような立体です。

それぞれの体積を求めて足し合わせることで全体の体積を求めることができますが、図２のように中の円柱を下まで移動させて1つの大きな円柱と考えて体積を求めます。

(体積)＝4×4×3.14×4＝64×3.14＝200.96(cm³)

図１

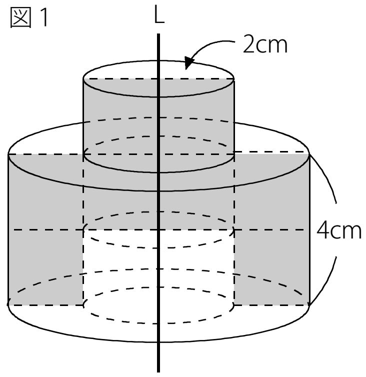
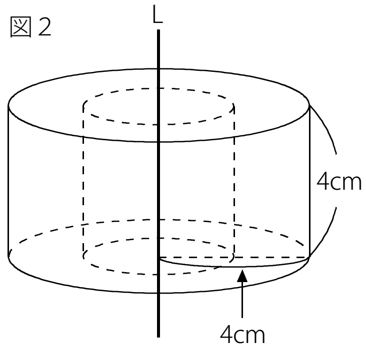


図２

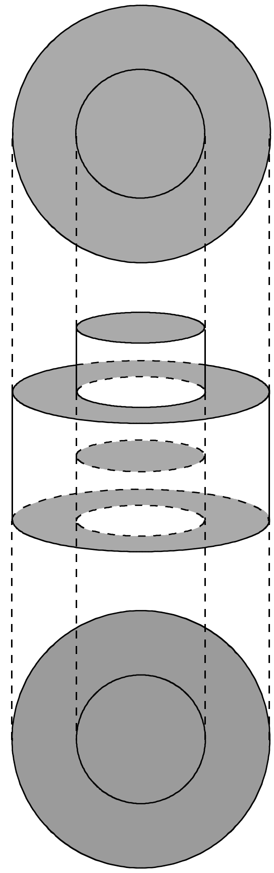


例題と解説

（２）　回転してできる立体を上から見ると半径4cmの円が見えます。
同じように下から見ても半径4cmの円が見えます。

よって
(上下から見える表面積)＝4×4×3.14×2＝**32×3.14**

図３　上から見える表面積



下から見える表面積

次に側面積を求めます。

図４

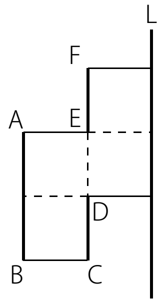


図４のABが作る側面(長方形)の横の長さは半径4cmの円の円周の長さと等しいので 4×2×3.14＝8×3.14
よって (ABが作る側面の面積)＝4×8×3.14＝**32×3.14**

CDが作る側面(長方形)の横の長さは半径2cmの円の円周の長さと等しいので 2×2×3.14＝4×3.14
よって (CDが作る側面の面積)＝2×4×3.14＝**8×3.14**
同様に (EFが作る側面の面積)＝2×4×3.14＝**8×3.14**

(表面積)＝32×3.14＋32×3.14＋8×3.14＋8×3.14＝80×3.14＝251.2(cm^2)

例題と解説

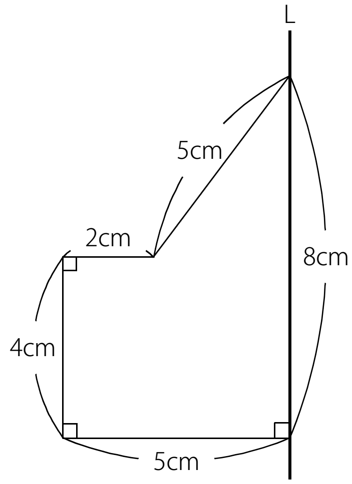
例題５

右図のような図形を直線Lを軸に1回転させたときにできる立体について次の問いに答えなさい。

ただし円周率は3.14とします。

（１）　この立体の体積は何cm^3ですか。

（２）　この立体の表面積は何cm^2ですか。

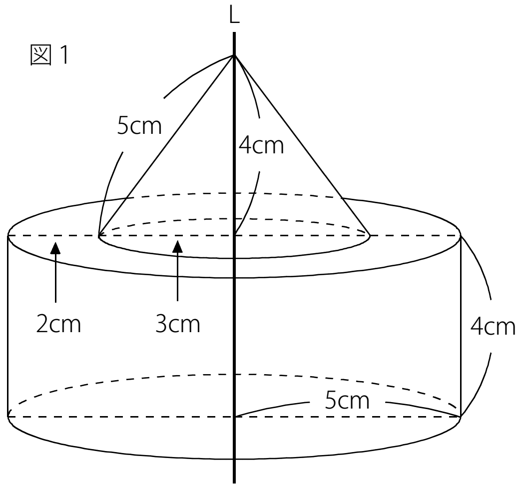


答え（１）$351.68cm^3$（２）$301.44cm^2$

[例題５の解説]

（１）　回転してできる立体は右図１のように円すいと円柱を組み合わせた立体になります。

図１



(円すいの体積)＝$3\times3\times3.14\times4\times\frac{1}{3}$＝$12\times3.14$

(円柱の体積)＝$5\times5\times3.14\times4$＝$100\times3.14$

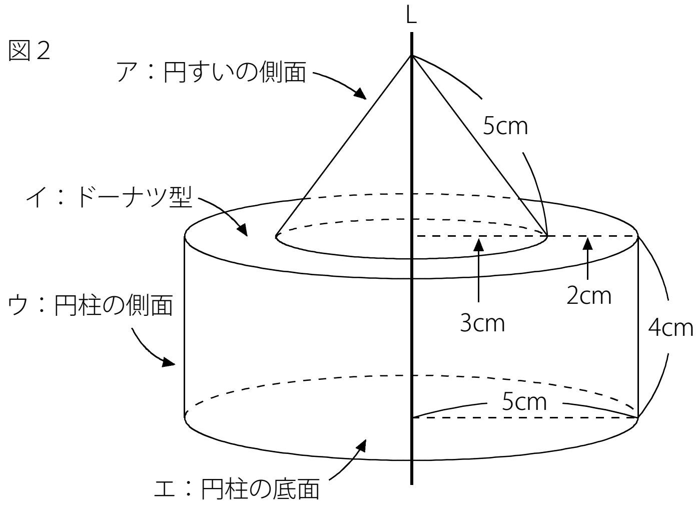
よって

(体積)＝$12\times3.14+100\times3.14=112\times3.14=351.68(cm^3)$

例題と解説

（２）　右図２のように分けて表面積を求めます。

図２



(ア)

(円すいの側面積)＝5×5×3.14×$\frac{3}{5}$＝**15×3.14**

(イ)

(ドーナツ型の面積)＝5×5×3.14－3×3×3.14＝**16×3.14**

(ウ)

(円柱の側面積)＝5×2×3.14×4＝**40×3.14**

(エ)

(円柱の底面積)＝5×5×3.14＝**25×3.14**

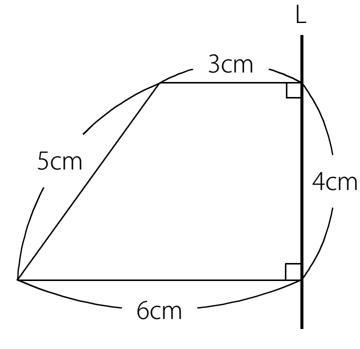
よって (表面積)＝15×3.14＋16×3.14＋40×3.14＋25×3.14＝96×3.14＝301.44(cm^2)

例題と解説

例題６

右図のような台形を直線Lを軸に1回転させたときにできる立体について次の問いに答えなさい。

ただし円周率は3.14とします。



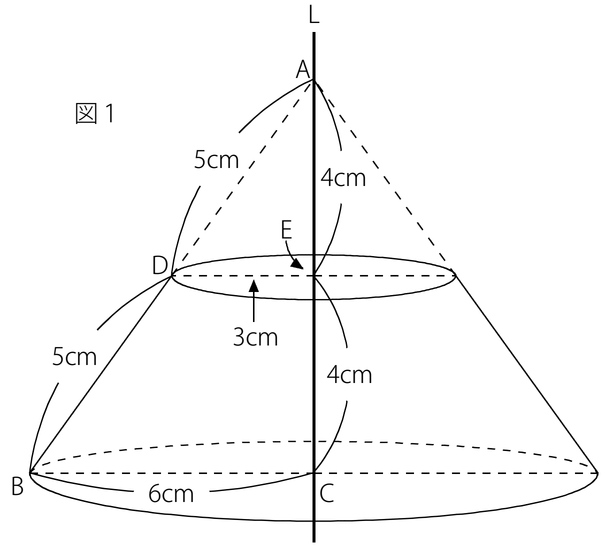
（１）　この立体の体積は何cm^3ですか。

（２）　この立体の表面積は何cm^2ですか。

答え（１）263.76cm^3（２）282.6cm^2

[例題６の解説]

（１）　回転してできる立体は右図１のように大きな円すいから小さな円すいを切り取ってできる**円すい台**です。



三角形ABCと三角形ADEは相似で相似比は 2：1 なので
AD＝5(cm)，AE＝4(cm)

(大きな円すいの体積)$=6\times6\times3.14\times8\times\frac{1}{3}=\mathbf{96\times3.14}$

(小さな円すいの体積)$=3\times3\times3.14\times4\times\frac{1}{3}=\mathbf{12\times3.14}$

よって (体積)$=96\times3.14-12\times3.14=84\times3.14=263.76(cm^3)$

例題と解説

（２）　円すい台は大きな円すいから小さな円すいを
切り取った形をしているので側面は図２のように
半径10cmの大きなおうぎ形から半径5cmの
小さなおうぎ形を切り取った形になっています。

上の底面と下の底面も合わせて
円すい台の展開図は右下図３のようになります。

(上底面の面積)＝3×3×3.14＝**9×3.14**
(下底面の面積)＝6×6×3.14＝**36×3.14**

側面積は$\dfrac{\text{半径}}{\text{母線}}$を利用して

(側面積)
$=10\times10\times3.14\times\dfrac{6}{10}-5\times5\times3.14\times\dfrac{3}{5}$
$=60\times3.14-15\times3.14$
＝45×3.14

(表面積)
＝9×3.14＋36×3.14＋45×3.14
＝90×3.14
$=282.6(cm^2)$

図２

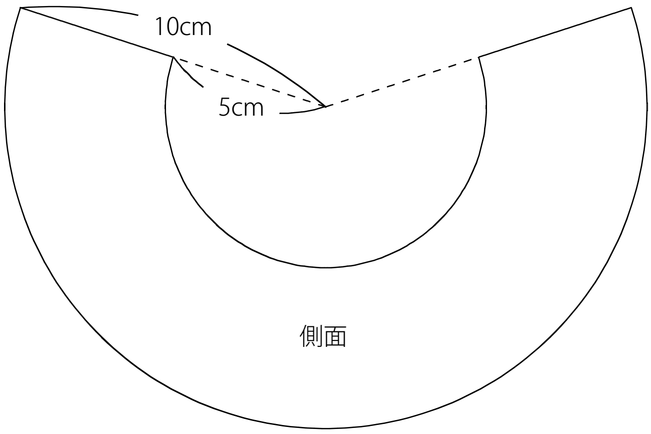
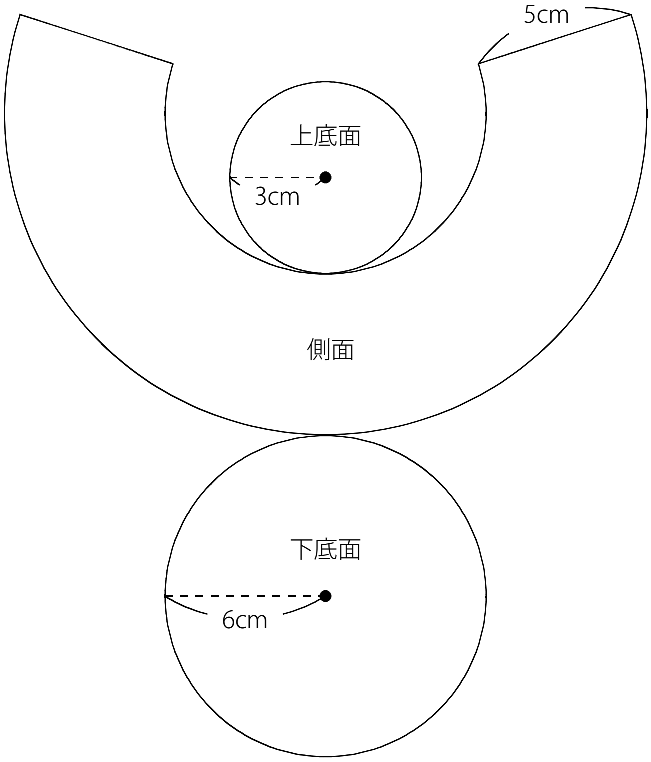


図３



例題と解説

ポイントまとめ

・図形を回転させてできる立体を**回転体**と呼びます。

・回転体を作図するときは軸を中心とした線対称な図形を書き、対応する点を円弧で結びます。

・円周率をあつかう場合はできるだけまとめて計算しましょう。

・回転体の側面を見落とさないように注意しましょう。

・円すいでは $\frac{\text{半径}}{\text{母線}}=\frac{\text{中心角}}{360}$ が成り立ちます。

・**(円すいの側面積)＝(母線)×(半径)×(円周率)** という式が成り立ちます。