



例題と解説

例題 1

3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る整数うち4000に最も近い数を求めなさい。

答え 4028

[例題 1 の解説]

3で割ると2余る数、5で割ると3余る数、7で割ると3余る数をそれぞれ書き上げて、最初に共通する数を探します。

3で割ると2余る数 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, **38**, 41, ...

5で割ると3余る数 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, **38**, 43, ...

7で割ると3余る数 3, 10, 17, 24, 31, **38**, 45, ...

上のようになり、3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る整数で一番小さな数は38であることがわかります。

3と5と7の最小公倍数は105なので、38に105を足していった数が3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る整数です。
つまり3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る整数は $38 + (105 \text{の倍数})$

3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る整数 38, 143, 248, 353, 458, ...

このまま書き上げて4000に近い数を探すのは大変なので、計算でおおよその近い数を探します。

$4000 \div 105 = 38 \text{ あまり } 10$ より4000から余りの10を引いた3990は105の倍数です。

3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る整数は $38 + (105 \text{の倍数})$ なので $3990 + 38 = 4028$

4028が4000に最も近い数ですが、念のために1つ小さい数を確認しておきます。 $4028 - 105 = 3923$

よって3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る整数うち4000に最も近い数は4028

※まずは共通する最も小さい数を探しましょう。



例題と解説

(別解)

共通する数を速く見つけるために、まずは5で割ると3余り、7で割ると3余る整数を考えます。

ともに3余るので5で割ると3余り、7で割ると3余る整数で最も小さい数は3です。

5と7の最小公倍数は35なので、3に35を足していった数が5で割ると3余り、7で割ると3余る整数です。

5で割ると3余り、7で割ると3余る数 3, 38, 73, 108, …

このうち3で割ると2余る数を探します。

$3 \div 3 = 1$ ← 割り切れるので×

$38 \div 3 = 12$ あまり2 ← 2余るので、38が3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る最小の整数です。

あとは同じように考えます。

3と5と7の最小公倍数は105なので、求めたい整数は $38 + (105 \text{の倍数})$ で4000に近い数です。

$4000 \div 105 = 38$ あまり10 より4000から余りの10を引いた3990は105の倍数

$3990 + 38 = 4028$, $4028 - 105 = 3923$

よって3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると3余る整数うち4000に最も近い数は4028

※ まずは2つの条件に共通する数を見つけてから、その数が残り1つの条件にあてはまるかどうかを考えると
すばやく3つの条件に共通する数を見つけることができます。



例題と解説

例題 2

450以上900以下の整数について次の問いに答えなさい。

- (1) 3で割り切れる整数は何個ありますか。
- (2) 3でも5でも割り切れる整数は何個ありますか。
- (3) 3または5で割り切れる整数は何個ありますか。
- (4) 3で割ると1余り、5で割ると2余る整数は何個ありますか。

答え (1) 151個 (2) 31個 (3) 211個 (4) 30個

[例題 2 の解説]

- (1) 1～900 の中に3で割り切れる整数は $900 \div 3 = 300$ (個)
求めたいのは 450～900 の中に3で割り切れる整数がいくつあるかということなので
1～900 のうち 1～449 に3で割り切れる数がいくつあるかを求めます。
 $449 \div 3 = 149$ (個)あまり2 より 149個です。
よって 450～900 の中に3で割り切れる整数は $300 - 149 = 151$ (個) あります。
※ $(900 - 450) \div 3 = 150$ (個) とするのはまちがいです。気をつけましょう。
- (2) 3と5の最小公倍数は15なので 「3または5で割り切れる整数」 = 「15で割り切れる整数」
1～900 の中に15で割り切れる整数は $900 \div 15 = 60$ (個)
1～449 の中に15で割り切れる整数は $449 \div 15 = 29$ (個)あまり14 なので29個
よって 450～900 の中に3でも5でも割り切れる整数は $60 - 29 = 31$ (個) あります。



例題と解説

- (3) 3または5で割り切れる整数は 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, ... のような数です。

このような数が 450~900 の451個の中に何個あるかを求めます。

※ $900 - 450 = 450$ (個) ではありません。450も含むので $900 - 450 + 1 = 451$ (個)

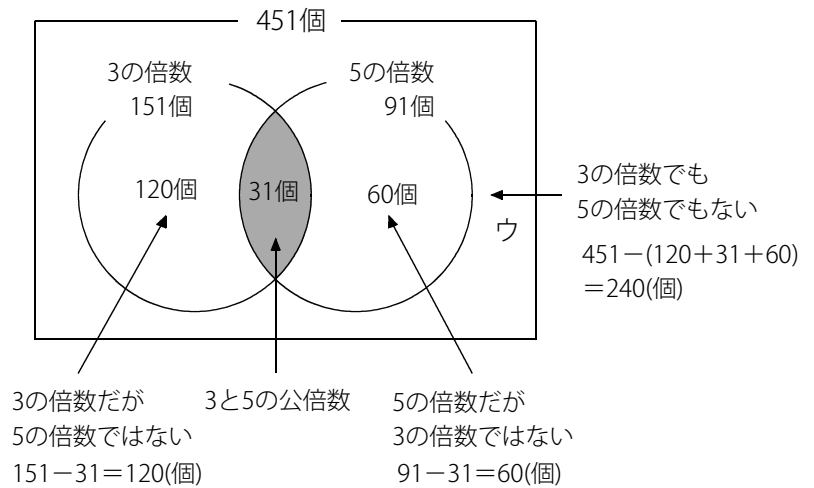
3で割り切れる整数 (1) より151個

5で割り切れる整数 $900 \div 5 = 180$, $449 \div 5 = 89$ あまり4 より $180 - 89 = 91$ (個)

3でも5で割り切れる整数 (2) より31個

ベン図で整理すると右図のようになります。

3または5で割り切れる整数は  の部分なので $151 + 91 - 31 = 211$ (個)



- (4) 3で割ると1余る整数 1, 4, 7, 10, ...

5で割ると2余る整数 2, 7, 12, ...

3で割ると1余り、5で割ると2余る最小の整数は7です。

3と5の最小公倍数は15なので、3で割ると1余り、5で割ると2余る整数は $7 + (15 \text{の倍数})$

450以上で条件にあてはまる最小の整数は $15 \times 30 + 7 = 450 + 7 = 457$

900以下で条件にあてはまる最大の整数は $15 \times 60 + 7 - 15 = 900 + 7 - 15 = 892$

よって条件にあてはまる整数は 457, 472, 487, ..., 877, 892

全部で $(892 - 457) \div 15 + 1 = 30$ (個)



例題と解説

例題 3

12の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12 の6個です。

そして12の約数をすべてかけ合わせた数は次のように求めることができます。

$$\begin{aligned} &1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 12 \\ &= (1 \times 12) \times (2 \times 6) \times (3 \times 4) \\ &= 1728 \end{aligned}$$

これをもとにして次の問いに答えなさい。

- (1) 30の約数をすべてかけ合わせるといくつになりますか。
- (2) 100の約数をすべてかけ合わせるといくつになりますか。

答え (1) 810000 (2) 1000000000

[例題 3 の解説]

- (1) 30の約数 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

$$\begin{aligned} &1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 10 \times 15 \times 30 \\ &= (1 \times 30) \times (2 \times 15) \times (3 \times 10) \times (5 \times 6) \\ &= 30 \times 30 \times 30 \times 30 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 810000 \end{aligned}$$

- (2) 100の約数 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

$$\begin{aligned} &1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 10 \times 20 \times 25 \times 50 \times 100 \\ &= (1 \times 100) \times (2 \times 50) \times (4 \times 25) \times (5 \times 20) \times 10 \\ &= 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 10 \\ &= 1000000000 \end{aligned}$$

※ 100は四角数(平方数)なので約数の個数は奇数個です。

※ 素数の平方数 4, 9, 25, 49, 121, … の約数の個数は3個です。



例題と解説

例題 4

例えば $\frac{7}{2 \times 5 \times 5}$ を小数に直すと 0.14 となり、小数点以下2桁の数になります。

では次の分数を小数に直したとき、小数点以下何桁の数になりますか。 $\frac{3}{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$

答え 小数点以下6桁

[例題 4 の解説]

$$\frac{3}{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = 3 \div (2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) = 3 \div 62500 = 0.000048$$

よって小数点以下6桁の数になります。

(別解)

$$\frac{3}{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3}{(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3}{10 \times 10 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$$

分母と分子に $2 \times 2 \times 2 \times 2$ をかけます。

$$\begin{aligned} \frac{3}{10 \times 10 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} &= \frac{3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{10 \times 10 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{48}{10 \times 10 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)} \\ &= \frac{48}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{48}{1000000} \end{aligned}$$

よって $48 \div 1000000 = 0.000048$ となるので小数点以下6桁の数になります。

※ 分母の2と5の個数を同じにすることで 2×5 のセットだけになります。

このように式の形を変えることで分母が 1000... という数になり、暗算でも計算できるようになります。

※ 分母が2と5の積になっている場合は 2×5 のセットを作るように式変形すると計算が簡単になります。



例題と解説

例題 5

次のア～オはすべて異なる数で1～9の整数のうちどれかがあてはまります。

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = \text{ア} \times \text{イ} \times \text{ウ} \times \text{エ} \times \text{オ}$$

このとき ア , イ , ウ , エ , オ にあてはまる数を求めなさい。ただし $\text{ア} < \text{イ} < \text{ウ} < \text{エ} < \text{オ}$ とします。

答え $\text{ア}=2, \text{イ}=3, \text{ウ}=6, \text{エ}=7, \text{オ}=9$

[例題 5 の解説]

1～9までの整数を素因数分解しておきます。

$$1=1, 2=2, 3=3, 4=2 \times 2, 5=5, 6=2 \times 3, 7=7, 8=2 \times 2 \times 2, 9=3 \times 3$$

$\text{ア} \times \text{イ} \times \text{ウ} \times \text{エ} \times \text{オ}$ を素因数分解して $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$ になるようにします。

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$ の中には5がないのでア～オは5ではありません。

また、7が1個あるのでア～オのうちどれかが7であることがわかります。

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$ の中に3は4個あります。

1～9をそれぞれ素因数分解すると3は全部で4個なのでア～オのうち3つは 3 , 6 , 9 です。

ここまですると整理すると ア～オ の5つのうち4つは 3 , 6 , 7 , 9

$3 \times 6 \times 7 \times 9$ を素因数分解すると $3 \times (2 \times 3) \times 7 \times (3 \times 3) = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$ となるので $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$ と比べると2が1個足りません。よって ア～オ のうち残り1つは2であることがわかります。

$$\text{ア}=2, \text{イ}=3, \text{ウ}=6, \text{エ}=7, \text{オ}=9$$



例題と解説

例題 6

2つの整数A, Bについて、次の2つの式が成り立ちます。このとき次の問いに答えなさい。

$$A \times B = 5082, B - A = 121$$

- (1) 整数A, Bの最大公約数を求めなさい。
- (2) 整数Aを求めなさい。

答え (1) 11 (2) 33

[例題 6 の解説]

- (1) 5082という数の性質を調べるために素因数分解をします。

$$5082 = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11$$

整数A, Bと最大公約数について考えるので右図のように表します。

A, Bの最大公約数をPとします。

最大公約数で割っているので、右図はこれ以上、下に割っていくことはできません。

このとき $A = C \times P$, $B = D \times P$ となります。

$$A \times B = C \times P \times D \times P = C \times D \times P \times P$$

$C \times D \times P \times P = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11$ となるので最大公約数 $P = 11$ であることがわかります。

$$\text{※ } C \times D = 2 \times 3 \times 7$$

$$\begin{array}{r} P \overline{) \begin{array}{cc} A & B \\ \hline C & D \end{array}} \end{array}$$

- (2) $C \times D = 2 \times 3 \times 7$ なので $C = 2 \times 3$, $D = 7$ または $C = 2 \times 7$, $D = 3$ などの組み合わせが考えられます。

$$B - A = 121 \text{ という条件があるので } D \times P - C \times P = 121$$

$$\text{つまり } P \times (D - C) = 121 \text{ で } P = 11 \text{ なので } D - C = 121 \div 11 = 11$$

$D - C = 11$ となるためには $D = 2 \times 7$, $C = 3$ であればよいことになります。

$$\text{よって } A = C \times P = 3 \times 11 = 33$$

※ 見慣れない数が出てきた場合は素因数分解をして数の性質を調べるようにしましょう。



例題と解説

ポイントまとめ

- 100は四角数(平方数)なので約数の個数は奇数個です。
- 素数の平方数 $4, 9, 25, 49, 121, \dots$ の約数の個数は3個です。
- 分母が2と5の積になっている場合は 2×5 のセットを作るように式変形すると計算が簡単になります。
- 見慣れない数が出てきた場合は素因数分解をして数の性質を調べるようにしましょう。