例題と解説

例題１

90を素因数分解すると 2×3×3×5 となります。5460を素因数分解しなさい。

答え 2×2×3×5×7×13

[例題１の解説]

素数と素因数分解について整理しておきます。

整数を素数の積の形で表すことを**素因数分解**（そいんすうぶんかい）と言います。

1とその数自身以外の約数を持たない1より大きな整数を素数と言います。つまり素数の約数の個数は2個です。

1は素数ではありません。注意しましょう。

1から100までの素数は次のようになります。

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97

1から100までには素数が25個あり、1から100まででもっとも大きな素数は97です。

5460を素因数分解する場合は、右図のように5460を素数で割っていきます。

2	5460
2	2730
3	1365
5	455
7	91
13	13
	1

右図より5460を素因数分解すると 5460＝2×2×3×5×7×13 となります。

※ 2や5で割れない場合は3の倍数条件をもとに3で割ることができるかどうかを調べましょう。
3の倍数条件 … 各位の数の和が3で割り切れる。

※ 5460＝2×2×3×5×7×13 なので5460は7や13で割り切ることができます。
また、5460は2で2回割り切ることができるということもわかります。

※ 素因数分解で 2，3，5 でも割れない場合は 7，11，13，17，… のように素数を小さい順に試してみましょう。

例題と解説

例題２

次の問いに答えなさい。

（１）　1から30までの整数の積は2で何回割ることができますか。

（２）　1から30までの整数の積は3で何回割ることができますか。

（３）　1から30までの整数の積は18で何回割ることができますか。

答え　（１）26回（２）14回（３）7回

[例題２の解説]

例えば1から6までの整数の積は $1\times2\times3\times4\times5\times6=720$ で $720\div2=360$，$360\div2=180$，$180\div2=90$，$90\div2=45$

となるので2で4回割ることができます。ただし数が大きくなると積を求めることが難しいので、積を求めずに割ることができる回数を求められるようにしておきましょう。

「2で何回割ることができるか」＝「2がいくつ含まれているか」ということに着目します。

$1\times2\times3\times4\times5\times6$ をそれぞれ素因数分解すると $1\times2\times3\times(2\times2)\times5\times(2\times3)$ となります。

右図のように2が4個含まれているので

1から6までの積は2で4回割ることができるということがわかります。

$$1\times2\times3\times2\times2\times5\times2\times3$$

（１）　1から30までの2の倍数をそれぞれ素因数分解して2がいくつ含まれているかを調べます。

$2=2$，$4=2\times2$，$6=2\times3$，$8=2\times2\times2$，$10=2\times5$，$12=2\times2\times3$，$14=2\times7$，$16=2\times2\times2\times2$，$18=2\times3\times3$

$20=2\times2\times5$，$22=2\times11$，$24=2\times2\times2\times3$，$26=2\times13$，$28=2\times2\times7$，$30=2\times3\times5$

2は全部で26個なので、1から30までの整数の積は2で26回割ることができます。

(別解)

1から30までに2で1回割ることができる数は $30\div2=15$(個)

さらにその15個のうち2で2回割ることができるのは $15\div2=7$(個)あまり1

さらにその7個のうち2で3回割ることができるのは $7\div2=3$(個)あまり1

さらにその3個のうち2で4回割ることができるのは $3\div2=1$(個)あまり1

よって全部で $15+7+3+1=26$(個) なので2で26回割ることができます。

整理すると右図のように求めることができます。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30 \\ \hline 2 & 15 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad 15+7+3+1=26$$

（２）　1から30までの3の倍数をそれぞれ素因数分解して3がいくつ含まれているかを調べます。

3＝3，6＝2×3，9＝3×3，12＝2×2×3，15＝3×5，18＝2×3×3，21＝3×7，24＝2×2×2×3
27＝3×3×3，30＝2×3×5

3は全部で14個なので、1から30までの整数の積は3で14回割ることができます。

(別解)

1から30までに3で1回割ることができる数は 30÷3＝10(個)
さらにその10個のうち3で2回割ることができるのは 10÷3＝3(個)あまり1
さらにその3個のうち3で3回割ることができるのは 3÷3＝1(個)
よって全部で 10＋3＋1＝14(個) なので3で14回割ることができます。
整理すると右図のように求めることができます。

$$\begin{array}{r|l} 3 & 30 \\ \hline 3 & 10 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 10+3+1=14$$

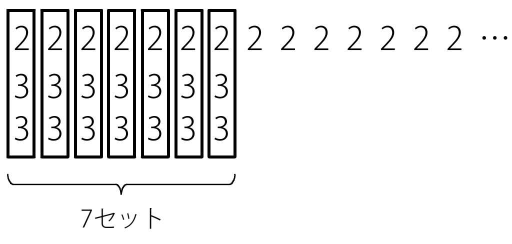
（３）　18を素因数分解すると 18＝2×3×3 となります。

2が1個、3が2個あれば18で割ることができます。
例えば下図のように1から6までの積は18で1回割ることができます。

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\div18=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{18}=\frac{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times2\times2\times5\times2\times\cancel{3}}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}=40$$

分子の 1×2×3×4×5×6 の中に2が1個、3が2個のセットが1セットあるので1回割ることができます。

1から30までの中に2は26個、3は14個あります。
2が1個、3が2個のセットが何セットできるかを求めます。
3は1セットに2個必要です。
3は全部で14個なので 14÷2＝7(セット)
※ 2はたくさんあるので考える必要はありません。
よって1から30までの積は18で7回割ることができます。



例題と解説

例題３

次の計算をすると、0は一の位から連続して何個並びますか。それぞれ求めなさい。

（１）　2×2×2×2×2×2×5×5×5

（２）　1×2×3×4×5×6×7×8×9×10×11×12×13×14×15

（３）　1×2×3×　…　×59×60

答え　（１）3個（２）3個（３）14個

[例題３の解説]

（１）　2×2×2×2×2×2×5×5×5＝8000

よって0は一の位から連続して3個並びます。

(別解)

10＝2×5 なので 2×2×2×2×2×2×5×5×5 の中に 2×5 が何セットあるかを考えます。

2は6個、5は3個なので 2×5 は3セット作ることができます。

よって0は一の位から連続して3個並びます。

$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times5\times5=\overbrace{(2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5)}^{3セット}\times2\times2\times2$$

（２）　1から15までに2と5がそれぞれ何個含まれているかを調べます。

右図のようになるので2は11個、5は3個あることがわかります。

よって 2×5 は3セット作ることができます。

よって0は一の位から連続して3個並びます。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 15 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \quad 7+3+1=11 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 5 & 15 \\ \hline & 3 \end{array}$$

※ 実際に計算すると 1×2×3×4×5×6×7×8×9×10×11×12×13×14×15＝1307674368000 となるので
0は一の位から連続して3個並ぶことがわかります。

（３）　1から60までに2と5がそれぞれ何個含まれているかを調べます。
右図のようになるので2は56個、5は14個あることがわかります。
よって 2×5 は14セット作ることができます。
よって0は一の位から連続して14個並びます。

$$\begin{array}{r|l}2 & 60\\ \hline 2 & 30\\ \hline 2 & 15\\ \hline 2 & 7\\ \hline 2 & 3\\ \hline & 1\end{array}\;56 \qquad \begin{array}{r|l}5 & 60\\ \hline 5 & 12\\ \hline & 2\end{array}\;14$$

※ 「0が一の位から連続して何個並ぶか」と「10で何回割れるか」は同じ意味です。

例題と解説

例題４

次の問いに答えなさい。

（１）　1から100までにふくまれる偶数の積は10で何回割ることができますか。

（２）　1から100までにふくまれる3の倍数の積は10で何回割ることができますか。

答え　（１）12回（２）7回

[例題４の解説]

（１）　1から100までにふくまれる偶数は ２，４，６，８，10，…，96，98，100 の50個なので

それらの積 2×4×6× … ×98×100 が10で何回割ることができるかということです。

2×5 が何セット作れるかを考えますが、2はたくさんあるので、5が何個あるかということだけを求めます。

1〜100の偶数のうち5の倍数は 10，20，30，40，50，60，70，80，90，100

それぞれ素因数分解すると5の個数は

右図のようになります。

1個	1個	1個	1個	2個	1個	1個	1個	1個	2個
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
2×5	2×2×5	2×3×5	2×2×2×5	2×5×5	2×2×3×5	2×5×7	2×2×2×2×5	2×3×3×5	2×2×5×5

5は全部で 1×8＋2×2＝12(個) なので 2×5 は12セット作ることができます。

よって1から100までにふくまれる偶数の積は10で12回割ることができます。

例題と解説

(別解)

2×4×6× … ×98×100 の式の形を変えて考えます。

2×4×6× … ×98×100

＝(2×1)×(2×2)×(2×3)× … ×(2×49)×(2×50)

＝2×1×2×2×2×3× … 2×49×2×50

2をくくり出す

$＝\underbrace{2\times 2\times \cdots \times 2}_{2が50個}\times(1\times 2\times 3\times \cdots \times 49\times 50)$

あとは 1×2×3× … ×49×50 の中に5が何個含まれているかを考えます。

$$\begin{array}{r|l} 5 & 50 \\ \hline 5 & 10 \\ \hline & 2 \end{array} \quad 12$$

このとき右図のようになります。

よって5は12個あることがわかるので 2×4×6× … ×98×100 は10で12回割ることができます。

（２）　1から100までにふくまれる3の倍数は 3，6，9，12，15，…，96，99 の33個なので

それらの積 3×6×9× … ×96×99 が10で何回割ることができるかということです。

3×6×9× … ×96×99 の式の形を変えて考えます。

3×6×9× … ×96×99

＝(3×1)×(3×2)×(3×3)× … ×(3×32)×(3×33)

＝3×1×3×2×3×3× … ×3×32×3×33

＝3×3× … ×3×(1×2×3× … ×32×33)

1×2×3× … ×32×33 の中に2はたくさんあるので、

あとは 1×2×3× … ×32×33 の中に5が何個含まれているかを考えます。

$$\begin{array}{r|l} 5 & 33 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline & 1 \end{array} \quad 7$$

このとき右図のようになります。

よって5は7個あることがわかるので 3×6×9× … ×96×99 は10で7回割ることができます。

例題と解説

例題５

2つの整数AとBがあり $24 \times A = B \times B$ の式が成り立つとき、AとBにあてはまる最も小さな整数をそれぞれ求めなさい。

答え $A=6$，$B=12$

[例題５の解説]

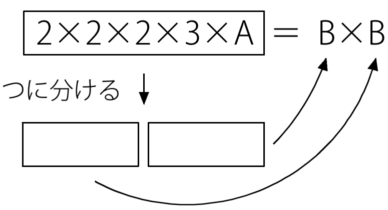
24を素因数分解すると $24=2\times2\times2\times3$

よって $24\times A=B\times B$ は $2\times2\times2\times3\times A=B\times B$ となります。

左辺(式の左側)$=2\times2\times2\times3\times A$

右辺(式の右側)$=B\times B$

右辺が $B\times B$ となっているので、左辺を2つの同じものに分ける必要があります。



$2\times2\times2\times3\times A$ の中に**2は3個、3は1個**なので、2つに分けるためには2を1個、3を1個増やして、**2を4個、3を2個**にします。

このとき $2\times2\times2\times3\times A=2\times2\times2\times3\times(2\times3)$ となるので $A=2\times3=6$ となることがわかります。

※ 仮に $A=2$ とすると (左辺)$=2\times2\times2\times3\times2$ となります。

　このとき2は4個なので2個ずつに分けることができますが、3は1個しかないので2つに分けることができません。

$A=6$ のとき (左辺)$=2\times2\times2\times3\times A=2\times2\times2\times3\times(2\times3)=2\times2\times2\times2\times3\times3$ なので2つに分けると $2\times2\times3$

よって $B=2\times2\times3=12$

※ $A=6$，$B=12$ のとき $24\times6=12\times12$ で成り立つことがわかります。

※ 仮に $A=2\times3\times3\times3=54$ とすると $B=2\times2\times3\times3=36$ のようにすることができるので、この場合も成り立ちますが

　AとBにあてはまる「最も小さな整数」を求める問題なのでこの場合はあてはまりません。

例題と解説

例題６

2つの整数AとBがあり $\dfrac{B}{A \times A \times A} = \dfrac{1}{180}$ の式が成り立つとき、AとBにあてはまる最も小さな整数をそれぞれ求めなさい。

答え A＝30 , B＝150

[例題６の解説]

180を素因数分解すると 180＝2×2×3×3×5

よって $\dfrac{B}{A \times A \times A} = \dfrac{1}{180}$ は $\dfrac{B}{A \times A \times A} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}$ となります。

右辺の分母 2×2×3×3×5 を同じ3つに分けることができないので、このままでは左辺の A×A×A という形にすることができません。

3つに分けるためには 2×2×3×3×5 に2を1個、3を1個、5を2個かけて 2×2×2×3×3×3×5×5×5 とします。
このとき 2×2×2×3×3×3×5×5×5＝(2×3×5)×(2×3×5)×(2×3×5) のように3つに分けることができます。

分母に 2×3×5×5 をかけるので分子にも 2×3×5×5 をかけます。
このとき次のようになります。 $\dfrac{B}{A \times A \times A} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5}$

よって B＝1×2×3×5×5＝150 となり A×A×A＝2×2×2×3×3×3×5×5×5＝(2×3×5)×(2×3×5)×(2×3×5) なので A＝2×3×5＝30 となることがわかります。

※ $\dfrac{B}{A \times A \times A} = \dfrac{1}{180}$ の式の形を変えて 180×B＝A×A×A にあてはまる最小のAとBを求める問題と同じです。

※ このタイプの問題では**「同じものに分ける」**ために**「足らない数をさらにかける」**という考え方をします。

例題と解説

例題７

1×2×3×4× … のように1から順に整数をかけ合わせていきます。積が初めて17640で割り切れるようになるのはいくつまでかけ合わせたときですか。

答え 14

[例題７の解説]

17640がどのような数であるかを調べるために素因数分解をします。

17640＝2×2×2×3×3×5×7×7

2	17640
2	8820
2	4410
3	2205
3	735
5	245
7	49
7	7
	1

例えば 1から7までかけ合わせた数 1×2×3×4×5×6×7 を調べてみます。

$$\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}{17640}=\frac{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{5}\times2\times\cancel{3}\times\cancel{7}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times\cancel{7}\times7}=\frac{2}{7}$$

このとき上図のように分母に7が1個残っているので割り切れません。

割り切るためには分子に7がもう1個必要です。
素因数の7が次に出てくるのは 14＝2×7 より14までかけたときです。

よって1から14までかけ合わせたときに初めて17640で割り切れるようになります。
※ これ以降15や16をかけてもすべて17640で割り切れます。

※ 見慣れない大きな数が出てきたときは素因数分解をしてその数がどのような数であるかを調べましょう。

例題と解説

ポイントまとめ

・整数を素数の積の形で表すことを**素因数分解**（そいんすうぶんかい）と言います。

・1とその数自身以外の約数を持たない1より大きな整数を素数と言います。つまり素数の約数の個数は2個です。

・1は素数ではありません。注意しましょう。

・素因数分解で ２，３，５ でも割れない場合は ７，11，13，17，… のように素数を小さい順に試してみましょう。

・「2で何回割ることができるか」＝「2がいくつ含まれているか」

・「0が一の位から連続して何個並ぶか」＝「10で何回割れるか」

・見慣れない大きな数が出てきたときは素因数分解をしてその数がどのような数であるかを調べましょう。