



例題と解説

例題1

3桁の整数のうち、741のように百の位の数が最も大きく、一の位の数が最も小さいような整数は何個ありますか。
ただし、533のように同じ数を含む場合はのぞきます。

答え 120個

[例題1の解説]

百の位と十の位を決めて、それぞれ何通りずつ考えられるかを場合分けして数え上げます。

百の位が9，十の位が8 のとき $98\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は 0～7 の8通り

百の位が9，十の位が7 のとき $97\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は 0～6 の7通り

百の位が9，十の位が6 のとき $96\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は 0～5 の6通り

...

百の位が9，十の位が1 のとき $91\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は0だけなので1通り

よって、百の位が9のときは全部で $8+7+6+\cdots+1=(8+1)\times 8\div 2=36$ (通り)

百の位が8のときも同じように数えます。

百の位が8，十の位が7 のとき $87\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は 0～6 の7通り

百の位が8，十の位が6 のとき $86\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は 0～5 の6通り

...

百の位が8，十の位が1 のとき $81\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は0だけなので1通り

よって、百の位が8のときは全部で $7+6+\cdots+1=(7+1)\times 7\div 2=28$ (通り)

同じように

(百の位が7のとき) $=6+5+\cdots+1=21$ (通り)，(百の位が6のとき) $=5+4+\cdots+1=15$ (通り)

(百の位が5のとき) $=4+3+2+1=10$ (通り)，(百の位が4のとき) $=3+2+1=6$ (通り)

(百の位が3のとき) $=2+1=3$ (通り)，(百の位が2のとき) $=1$ (通り)

全部で $36+28+21+15+10+6+3+1=120$ (通り) よって120個



例題と解説

(別解)

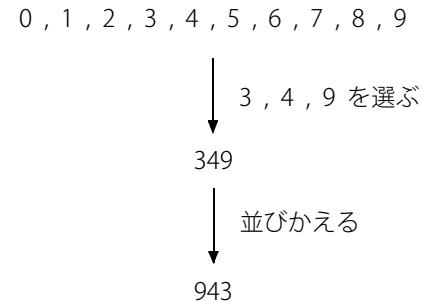
例えば右図のように0から9の10個の数字から 3, 4, 9 の数字を選びます。

この3個の数字を大きい順に並びかえると943となります。

つまり10個の数字から3個の数字を選べば、あとはそれらを大きい順に並びかえるだけなのでそれぞれ1通りに決まります。

よって10個の数字から3個の数字の選び方が何通りあるかということなので

$${}^{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120(\text{通り}) \quad \text{よって120個}$$



※「選びさえすれば、あとは自動的に1通りに決まる」というこのパターンをていねいに理解しておきましょう。



例題と解説

例題2

3桁の整数のうち、267のように百の位の数是最も小さく、一の位の数是最も大きいような整数は何個ありますか。
ただし、355のように同じ数を含む場合はのぞきます。

答え 84個

[例題2の解説]

「0から9の10個の数字から3個の数字を選べば、あとはそれらを小さい順に並べかえるだけ」と考えるのはまちがいです。

大きい順に並べかえる場合と異なり、小さい順に並べかえる場合は、百の位が0になってしまうことがあります。

3桁の整数なので百の位が0になってはいけません。

つまり選んだ3個の数字に0が含まれている場合は、小さい順に並べて3桁の整数にすることができません。

よって1から9の9個の数字から3個の数字を選びます。 ${}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ (通り)

あとはそれぞれ小さい順に並べるだけなので1通りに決まります。よって84個

(別解)

数え上げて確認をしておきます。

百の位が1，十の位が2 のとき $12\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は 3～9 の7通り

百の位が1，十の位が3 のとき $13\square$ とすると $\square$ にあてはまる数は 4～9 の6通り

… より (百の位が1のとき) $= 7 + 6 + \dots + 1 = 28$ (通り)

同じように

(百の位が2のとき) $= 6 + 5 + \dots + 1 = 21$ (通り)，(百の位が3のとき) $= 5 + 4 + \dots + 1 = 15$ (通り)

(百の位が4のとき) $= 4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (通り)，(百の位が5のとき) $= 3 + 2 + 1 = 6$ (通り)

(百の位が6のとき) $= 2 + 1 = 3$ (通り)，(百の位が7のとき) $= 1$ (通り)

よって全部で $28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$ (個)

※大きい順に並べかえる場合とは異なり、小さい順に並べかえる場合は先頭に0を使ってはいけないことに注意しましょう。



例題3

[A] , [B] , [C] , [D] , [E] , [F] のカードが1枚ずつ全部で6枚あります。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 6枚のカードのうち4枚を大きい箱に入れ、2枚を小さい箱に入れます。分け方は何通りありますか。
- (2) 6枚のカードのうち3枚を大きい箱に入れ、3枚を小さい箱に入れます。分け方は何通りありますか。
- (3) 6枚のカードを2つの区別がつかない同じ大きさの箱に3枚ずつ入れます。分け方は何通りありますか。

答え (1) 15通り (2) 20通り (3) 10通り

[例題3の解説]

- (1) 大きい箱に入れる4枚を選べば、あとの残りの2枚は小さい箱に入ります。

よって大きい箱に入れる4枚の組み合わせだけを考えればいいので ${}_6C_4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$ (通り)

※逆に考えれば小さい箱に入れる2枚の組み合わせだけを考えればいいので ${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ (通り)

- (2) 大きい箱に入れる3枚を選べば、あとの残りの3枚は小さい箱に入ります。

よって大きい箱に入れる3枚の組み合わせだけを考えればいいので ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ (通り)

- (3) 「大きい箱と小さい箱」ではなく、「区別がつかない2つの箱」に3枚ずつ分けます。

大きい箱と小さい箱に3個ずつ分ける場合は、(大きい箱, 小さい箱) とすると

例えば (ABC, DEF) と分ける場合と (DEF, ABC) と分ける場合が異なるので2通りになります。

しかし区別ができない2つの箱の場合は (ABC, DEF) と (DEF, ABC) が同じ分け方なので1通りです。

つまり大きい箱と小さい箱という区別がなくなるので(2)で求めた20通りを2で割って $20 \div 2 = 10$ (通り)



例題4

1から1000までの整数を書き並べます。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 数字の7は全部で何個ありますか。
- (2) 数字の7が含まれていない整数は何個ありますか。

答え (1) 300個 (2) 729個

[例題4の解説]

- (1) 1から1000までの1000個の整数を000から999までの1000個の整数として考えます。

つまり 000, 001, 002, 003, ..., 099, 100, 101, ..., 998, 999 の1000個です。

このようにすべて3桁とすることで数えやすくなります。7を何個含むかによって場合分けをします。

7を1個だけ含む場合

7□□ のとき 十の位には7以外の9通り, 一の位も7以外の9通りなので全部で $9 \times 9 = 81$ (通り)

7を1個だけ含む整数が81通りなので (7の個数) = $1 \times 81 = 81$ (個)

□7□ のとき 百の位には7以外の9通り, 一の位も7以外の9通りなので全部で $9 \times 9 = 81$ (通り)

7を1個だけ含む整数が81通りなので (7の個数) = $1 \times 81 = 81$ (個)

□□7 のとき 百の位には7以外の9通り, 十の位も7以外の9通りなので全部で $9 \times 9 = 81$ (通り)

7を1個だけ含む整数が81通りなので (7の個数) = $1 \times 81 = 81$ (個)

7を2個含む場合

77□ のとき 一の位は7以外の9通りなので全部で9通り

7を2個含む整数が9通りなので (7の個数) = $2 \times 9 = 18$ (個)

7□7 のとき 十の位は7以外の9通りなので全部で9通り

7を2個含む整数が9通りなので (7の個数) = $2 \times 9 = 18$ (個)

□77 のとき 百の位は7以外の9通りなので全部で9通り

7を2個含む整数が9通りなので (7の個数) = $2 \times 9 = 18$ (個)

7を3個含む場合 777なので3個

よって全部で $81 \times 3 + 18 \times 3 + 3 = 3 \times 100 = 300$ (個)

※1から1000を000から999に置きかえても、000や1000には7が含まれていないので個数に^{えいきょう}影響はありません。



例題と解説

(別解)

上の考え方で数えるとき7以外の数の個数も同様に300個になります。

例えば4の個数は

(4□□のとき) $=1 \times 9 \times 9 = 81$ (個) , (□4□のとき) $=1 \times 9 \times 9 = 81$ (個) , (□□4のとき) $=1 \times 9 \times 9 = 81$ (個)

(44□のとき) $=2 \times 9 = 18$ (個) , (4□4のとき) $=2 \times 9 = 18$ (個) , (□44のとき) $=2 \times 9 = 18$ (個)

(444のとき) $=3$ (個)

よって全部で $81 \times 3 + 18 \times 3 + 3 = 3 \times 100 = 300$ (個)

つまり 000から999のとき、0から9の10個の整数はすべて等しい回数含まれるということです。

000から999の1000個の整数はすべて3桁なので $3 \times 1000 = 3000$ (個) の数字が使われています。

0から9の10個の数字がすべて同じ個数だけ含まれているので $3000 \div 10 = 300$ (個)

よって他の数字と同様に7は300個あることがわかります。

※例えば00から99までには $2 \times 100 = 200$ (個) の数字が使われています。

0から9の10個の数字がすべて同じ個数だけ含まれているので $200 \div 10 = 20$ (個)

よって0から9のそれぞれの数字は20個ずつあります。

※とても重要な考え方なので問題と解法をセットで覚えておきましょう。

(2) 000から999までの1000個の整数の中に7が使われていない整数が何個あるかを求めます。

※000や1000には7が使われていないので、1から1000を000から999に置きかえても、影響はありません。

すべて3桁の整数なので□□□とします。

百の位に使える数は7以外の9通り，十の位に使える数は7以外の9通り，一の位に使える数は7以外の9通り

よって7を使わない整数は全部で $9 \times 9 \times 9 = 729$ (個)



例題 5

1から1000までの整数を書き並べます。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 数字の0は全部で何個ありますか。
- (2) 数字の0が含まれていない整数は何個ありますか。

答え (1) 192個 (2) 819個

[例題 5 の解説]

- (1) 1から1000までの1000個の整数を000から999までの1000個の整数として考えます。

つまり 000, 001, 002, 003, ..., 099, 100, 101, ..., 998, 999 の1000個です。

数字は全部で $3 \times 1000 = 3000$ (個) 使われています。

0から9の10個の整数はすべて等しい回数含まれるので (000～999に含まれる0の個数) $= 3000 \div 10 = 300$ (個)

ただし実際は1～1000なので 000, 001, 002, 003, ..., 099 には余分な0が含まれています。

これらに含まれる余分な0の個数は

000 → 3個

001～009 → $2 \times 9 = 18$ 個

010～099 → $1 \times 90 = 90$ 個

よって余分な0の個数は全部で $3 + 18 + 90 = 111$ (個)

また000～999までなので1000に含まれる3個の0がのぞかれています。

この3個を加えて、1～1000に含まれる0の個数は全部で $300 - 111 + 3 = 192$ (個)

※1～1000には2～9までの数字はそれぞれ300個ずつ含まれており、1は301個、0は192個含まれています。

1の場合は000～999までに300個ですが、1000に使われていた1個の1がのぞかれているので全部で $300 + 1 = 301$ (個)



- (2) 1～1000の1000個の整数から0が含まれている整数の個数を引いて、0が含まれていない整数の個数を求めます。
ここで0が複数個含まれている整数に着目しましょう。

(1)より1～1000では0が全部で192個使われていることがわかりました。

1～1000のうち0が2個使われている整数は次の整数です。

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900

これらの0の個数は全部で $2 \times 9 = 18$ (個) ですが、整数は9個なので $18 - 9 = 9$ (個) 引きます。

1～1000のうち0が3個使われている整数は次の整数です。

1000

0の個数は全部で3個ですが、整数は1個なので $3 - 1 = 2$ (個) 引きます。

よって (1～1000のうち0が含まれている整数の個数) $= 192 - 9 - 2 = 181$ (個)

数字の0が含まれていない整数は $1000 - 181 = 819$ (個)

(別解)

0を2個含む3桁の整数

□00 のとき 百の位は0以外の9通りなので全部で**9通り**

0を1個だけ含む3桁の整数

□0□ のとき 百の位には0以外の9通り, 一の位も0以外の9通りなので全部で $9 \times 9 = 81$ (通り)

□□0 のとき 百の位には0以外の9通り, 十の位も0以外の9通りなので全部で $9 \times 9 = 81$ (通り)

0を1個だけ含む2桁の整数

□0 のとき 十の位は0以外の9通りなので全部で**9通り**

さらに**1000も0を含む整数**なので (1～1000のうち0が含まれている整数の個数) $= 9 + 81 + 81 + 9 + 1 = 181$ (個)

よって数字の0が含まれていない整数は $1000 - 181 = 819$ (個)



例題6

次の問いに答えなさい。

- (1) A君とB君の2人でじゃんけんをします。あいこになる手の出し方は全部で何通りありますか。
- (2) A君とB君とC君の3人でじゃんけんをします。あいこになる手の出し方は全部で何通りありますか。
- (3) A君とB君とC君とD君の4人でじゃんけんをします。あいこになる手の出し方は全部で何通りありますか。

答え (1) 3通り (2) 9通り (3) 39通り

[例題6の解説]

- (1) グーを「グ」、チョキを「チ」、パーを「パ」と表すことにします。
また A君, B君 の出す手の組み合わせを (A, B) と表すことにします。 ※(2)以降も同様の表し方をします。
あいこになる手の出し方は2人が同じ手を出したときしかないので (グ, グ), (チ, チ), (パ, パ) の3通り
- (2) 3人以上のときあいこになるのは「全員が同じ手の場合」に加えて、「3種類の手がすべて出る場合」もあります。

全員が同じ手の場合

(グ, グ, グ), (チ, チ, チ), (パ, パ, パ) の3通り

3種類の手がすべて出る場合

(グ, チ, パ), (グ, パ, チ), (チ, グ, パ), (チ, パ, グ), (パ, グ, チ), (パ, チ, グ) の6通り

※グ, チ, パ の3つを並びかえるので $3 \times 2 \times 1 = 6$ (通り)

よって全部で $3 + 6 = 9$ (通り)



(3) 全員が同じ手の場合

(グ, グ, グ, グ), (チ, チ, チ, チ), (パ, パ, パ, パ) の3通り

3種類の手がすべて出る場合 → つまり4人のうち2人は同じ手

4人のうち同じ手を出す2人の選び方 $4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ (通り)

さらにその2人が グ, チ, パ のどれを出すかの3通り

残りの2人がそれぞれどちらの手を出すかの2通り

※AとBがグの場合 (グ, グ, チ, パ) か (グ, グ, パ, チ) なので残りの2人の手の出し方は2通り

3種類の手がすべて出る場合は $6 \times 3 \times 2 = 36$ (通り)

よって全部で $3 + 36 = 39$ (通り)

※じゃんけんのあいこの場合の数は頻出なので求め方を理解した上で覚えておくといいいでしょう。

(2人であいこ)=2(通り), (3人であいこ)=9(通り), (4人であいこ)=39(通り)

ポイントまとめ

- ・「選びさえすれば、あとは自動的に1通りに決まる」というパターンをていねいに理解しておきましょう。
- ・数字を並びかえて整数を作るとき、小さい順に並びかえる場合は先頭に0がこないように注意しましょう。
- ・000から999のとき、0から9の10個の整数はすべて等しい回数ずつ含まれます。
- ・(2人であいこ)=2(通り), (3人であいこ)=9(通り), (4人であいこ)=39(通り)