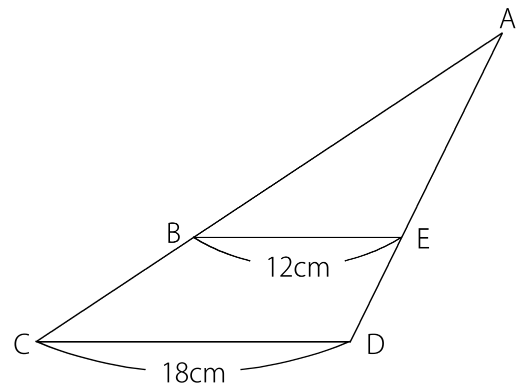
中学受験Unit.19- 3　5年　相似比と面積比１
相似2

例題と解説

例題１

右図の四角形BCDEはBEとCDが平行な台形で面積は90cm^{2}です。

三角形ABEの面積は何cm^{2}ですか。



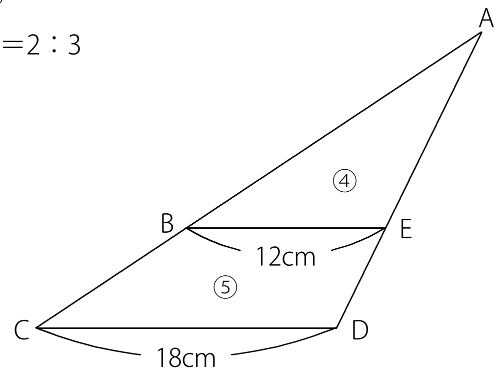
答え 72cm^2

[例題１の解説]

四角形BCDEは台形でBEとCDが平行なので、三角形ABEと三角形ACDは相似です。

BEとCDの長さは12cmと18cmなので三角形ABEと三角形ACDの相似比は 12：18＝2：3

相似比が 2：3 なので面積比は (2×2)：(3×3)＝4：9



ここで (三角形ABEの面積)＝④，(三角形ACDの面積)＝⑨ とします。

このとき右図のように (四角形BCDEの面積)＝⑨－④＝⑤ となります。

⑤＝90(cm^2) より ①＝90÷5＝18(cm^2)

よって (三角形ABEの面積)＝④＝18×4＝72(cm^2)

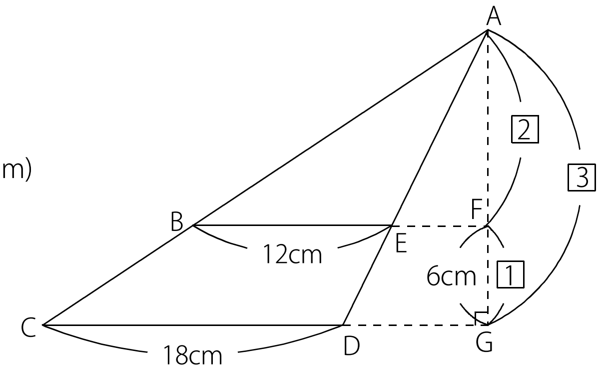
(別解)

(台形BCDEの高さ)＝90×2÷(12＋18)＝6(cm)

三角形ABEと三角形ACDの相似比は 2：3 なので高さも 2：3 です。

このとき右図のように6cmは $\boxed{3}-\boxed{2}=\boxed{1}$ にあたるので AF＝6×2＝12(cm)

(三角形ABEの面積)＝12×12÷2＝72(cm^2)



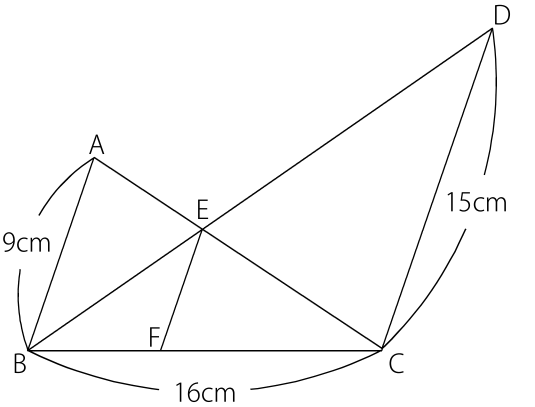
例題と解説

例題２

右図でABとDCとEFは平行です。このとき次の問いに答えなさい。

（１）　EFの長さは何cmですか。

（２）　BFの長さは何cmですか。



答え　（１）$5\frac{5}{8}$cm（２）6cm

[例題２の解説]

（１）　ABとDCとEFは平行なので、三角形ABEと三角形CDEは相似です。

AB＝9(cm)，CD＝15(cm) なので三角形ABEと三角形CDEの相似比は 3：5

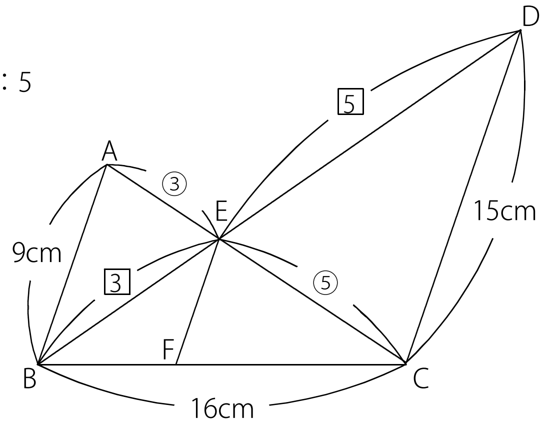
このとき右図のようになります。

三角形ABCと三角形EFCに着目すると、これらの三角形は相似です。

AE：EC＝3：5 なので AC：EC＝8：5

よって三角形ABCと三角形EFCの相似比は 8：5

EF＝$9\times\frac{5}{8}=5\frac{5}{8}$(cm)　(5.625cm)



（２）　三角形ABCと三角形EFCの相似比は 8：5 なので BF：FC＝3：5

(AE：EC＝3：5 なので平行線と線分の比の関係より BF：FC＝3：5 としてもかまいません。)

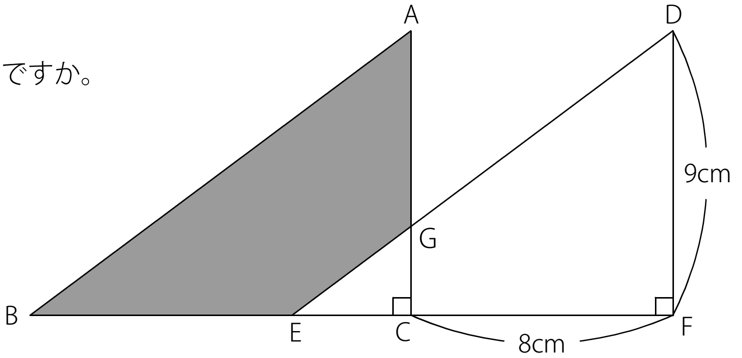
BF＝$16\times\frac{3}{8}=6$(cm)

例題と解説

例題3

右図の直角三角形ABCとDEFは合同です。

色のついた部分の面積が48cm²のとき、ECの長さは何cmですか。



答え 4cm

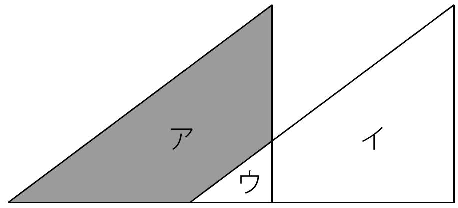
[例題3の解説]

まず台形CFDGの面積を求めます。

右図のように ア，イ，ウ の部分に分けて考えます。

直角三角形ABCとDEFは合同なので ア＋ウ＝イ＋ウ より ア＝イ

よって (台形CFDGの面積)＝48(cm²) であることがわかります。



台形CFDGの上底をCG，下底をFDとすると (CG＋9)×8÷2＝48(cm²)

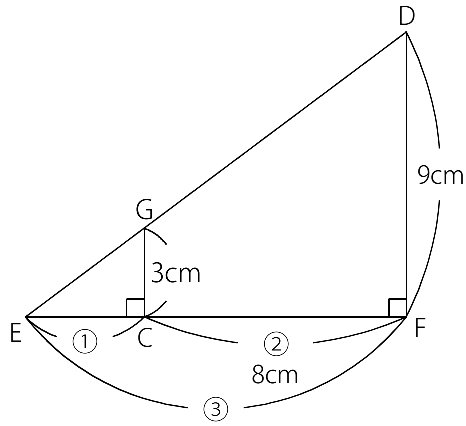
CG＋9＝12 より CG＝3(cm)

次に右図のように三角形DEFと三角形GECについて考えます。

これらの三角形は相似で相似比は 9：3＝3：1

EF：EC＝3：1 で8cmは右図のように ③－①＝② にあたります。

EC＝①＝8÷2＝4(cm)

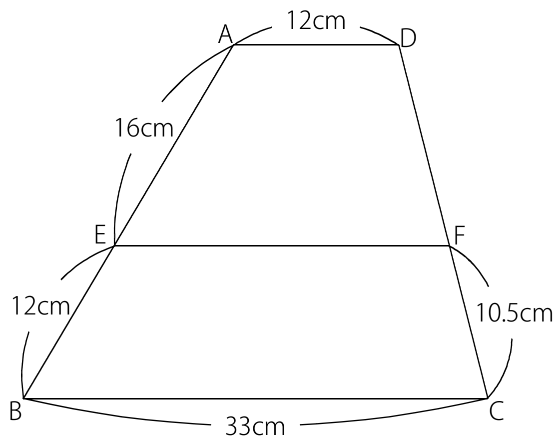


例題と解説

例題４

右図のような台形ABCDがあります。ADとBCとEFは平行です。

このとき次の問いに答えなさい。



（１）　DFの長さは何cmですか。

（２）　EFの長さは何cmですか。

答え　（１）14cm（２）24cm

[例題４の解説]

（１）　平行線と線分の比の関係より AE：EB＝DF：FC

AE：EB＝16：12＝4：3 なので DF：FC＝4：3

よって DF＝10.5×$\frac{4}{3}$＝14(cm)

（２）　右図のようにAを通ってDCに平行な直線を引きます。

このとき四角形AHCDは平行四辺形なので AD＝GF＝HC＝12(cm)

HC＝12(cm) なので BH＝33－12＝21(cm)

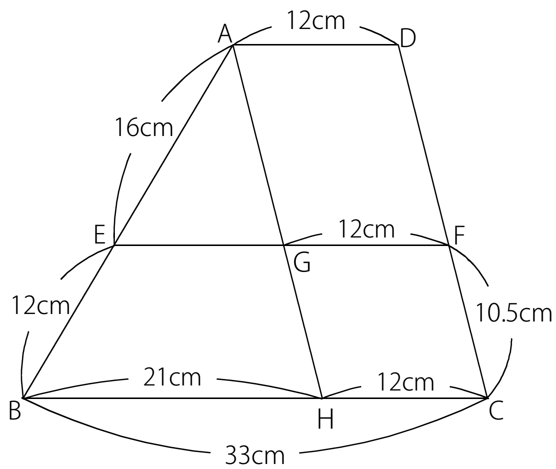
三角形ABHと三角形AEGは相似です。

AB：AE＝28：16＝7：4 より

三角形ABHと三角形AEGの相似比は 7：4

このとき BH：EG＝7：4 なので EG＝21×$\frac{4}{7}$＝12(cm)

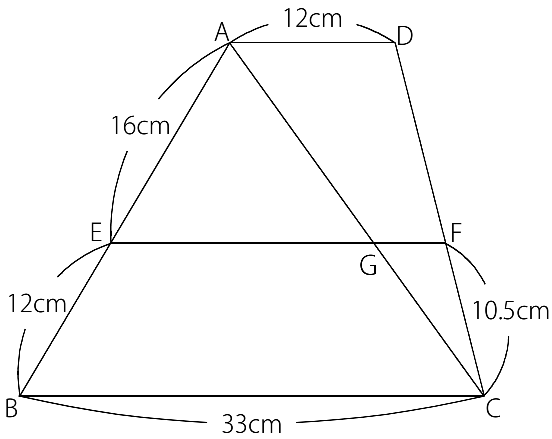
よって EF＝EG＋12＝12＋12＝24(cm)



例題と解説

(別解１)

右図のようにACを結んで三角形ABCと三角形CADに分けます。



三角形ABCと三角形AEGの相似比は (16＋12)：16＝7：4

よって BC：EG＝7：4 より EG＝$33\times\frac{4}{7}=\frac{132}{7}$(cm)

AE：EB＝4：3 なので DF：FC＝4：3

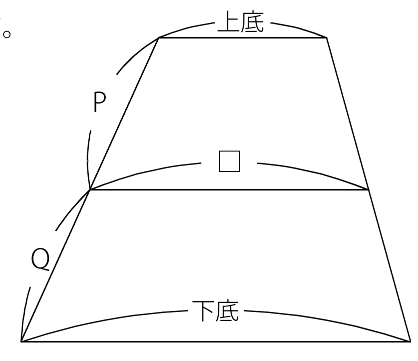
三角形CADと三角形CGFの相似比は 7：3

よって AD：GF＝7：3 より GF＝$12\times\frac{3}{7}=\frac{36}{7}$(cm)

EF＝EG＋GF＝$\frac{132}{7}+\frac{36}{7}$＝24(cm)

(別解２)

台形の上底と下底に平行に引かれた直線の長さは右図のような関係になります。



P：Q＝(上底と□の差)：(下底と□の差)

この問題では P：Q＝4：3 です。

(上底と□の差)：(下底と□の差)＝4：3 となります。

(上底と□の差)＋(下底と□の差)＝(上底と下底の差)＝33－12＝21(cm)

よって (上底と□の差)＝$21\times\frac{4}{7}$＝12(cm)

□＝上底＋12＝12＋12＝24(cm)

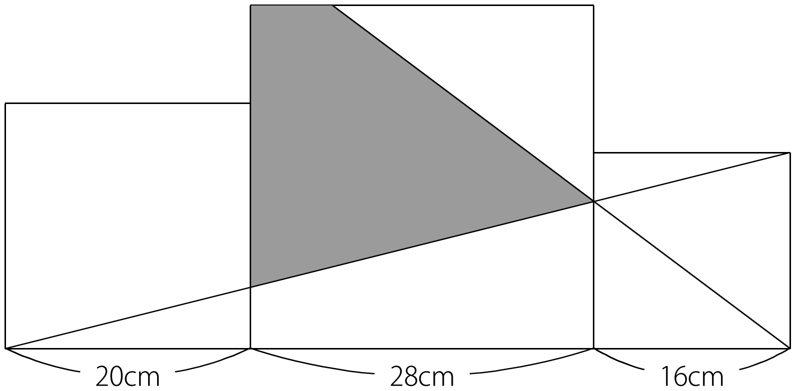
中学受験Unit.19- 3　5年　相似比と面積比１
相似2

例題と解説

例題５

右図は1辺の長さが20cm，28cm，16cmの3つの正方形を並べてできる形です。

色のついた部分の面積は何cm²ですか。



答え $375\frac{1}{3}$cm²

[例題５の解説]

図１

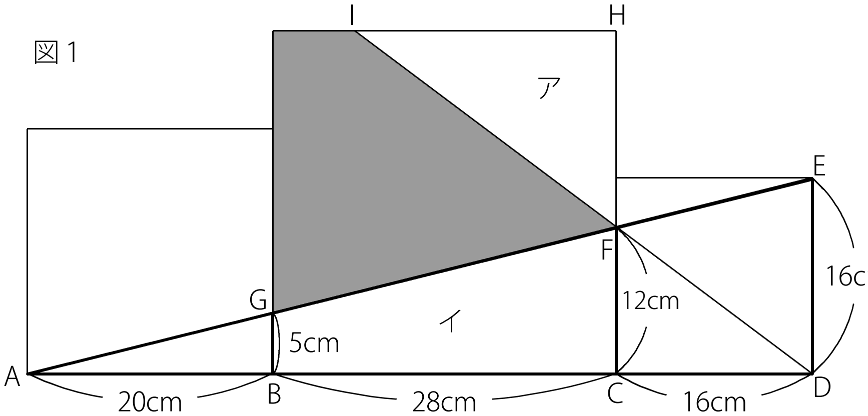
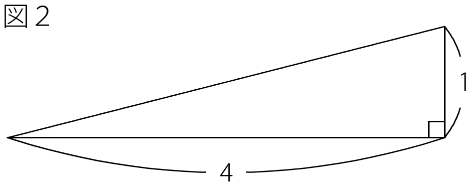


図２



1辺の長さが28cmの正方形から三角形アと台形イを引いて、色のついた部分の面積を求めます。

図１の三角形ADE，ACF，ABGはすべて相似です。

三角形ADEは図２のように2つの辺の長さの比が (20＋28＋16)：16＝4：1 の直角三角形です。

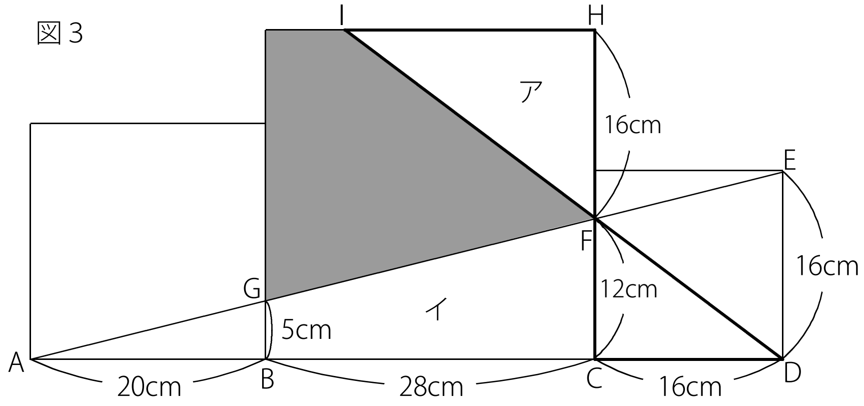
同じように三角形ACF，ABGも2つの辺の長さの比が 4：1 なので CF＝$(20+28)\times\frac{1}{4}=12$(cm)，BG＝$20\times\frac{1}{4}=5$(cm)

よって (イの面積)＝(5＋12)×28÷2＝238(cm²)

例題と解説

次に右図３の三角形CDFとHIFに着目します。
これらの三角形は砂時計型の相似になっています。

図３



HF＝28－12＝16(cm) より
三角形CDFとHIFの相似比は 12：16＝3：4
HI＝CD×$\frac{4}{3}$＝16×$\frac{4}{3}$＝$\frac{64}{3}$(cm)

よって (アの面積)＝16×$\frac{64}{3}$÷2＝170$\frac{2}{3}$(cm^2)

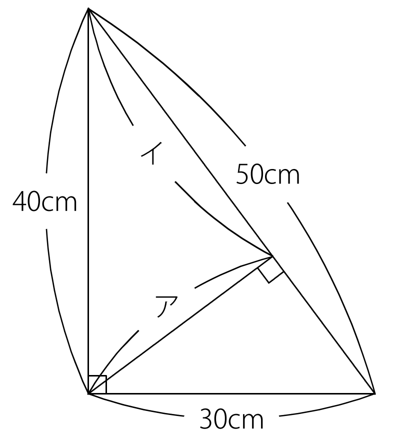
(色のついた部分の面積)＝28×28－(ア＋イ)＝784－$\left(238＋170\frac{2}{3}\right)$＝784－408$\frac{2}{3}$＝375$\frac{1}{3}$(cm^2)

※ 複雑な図形では、どのように解けばよいのか、わかりづらい場合があります。
　そのような場合は、使うか使わないかは別として、求めることができる長さを求めて図に書きこむようにしましょう。

例題と解説

例題６

右図のアとイの長さはそれぞれ何cmですか。



答え ア 24cm，イ 32cm

[例題６の解説]

図１のように (角BAC)＝●，(角ACB)＝○ とします。

このとき ●＋○＝180－(角ABC)＝180－90＝90(度) です。

三角形ADBに着目すると

(角ABD)＝180－90－●＝90－●＝○ であることがわかります。

次に三角形BDCに着目すると

(角DBC)＝180－90－○＝90－○＝● であることがわかります。

よってそれぞれの角度は図１のようになります。

三角形ABCとADBとBDCは3つの角がすべて等しいので相似です。

三角形ABCの3つの辺の比は 30：40：50＝3：4：5 なので

三角形ABCとADBとBDCは辺の比が図２のような 3：4：5 の直角三角形です。

図１

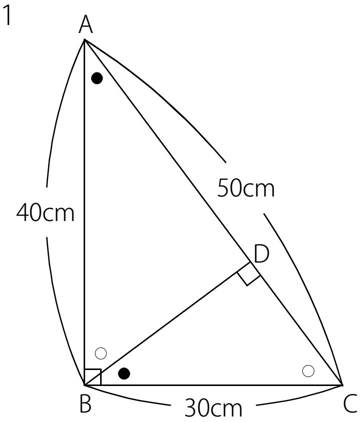
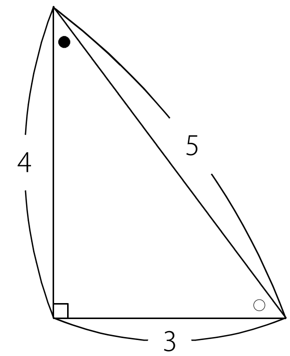


図２



中学受験Unit.19- 3　5年　相似比と面積比１
相似2

例題と解説

図３のように三角形ADBに着目します。

このとき3つの辺の比は 3：4：5 なので3つの辺の長さを ③，④，⑤ とすると
⑤＝40(cm) となっていることがわかります。

①＝40÷5＝8(cm) より ア＝③＝8×3＝24(cm)，イ＝④＝8×4＝32(cm)

※ ていねいに対応する辺を調べて③と④を逆にしないようにしましょう。

※ アの長さは相似を利用しなくても求めることができます。
(三角形ABCの面積)＝30×40÷2＝600(cm^2)
三角形ABCの底辺をACとするとアが高さになるので 50×ア÷2＝600(cm^2)
よって ア＝600×2÷50＝24(cm)

※ 右図4のように三角形BDCに着目してもかまいません。
$\boxed{5}$＝30(cm) より $\boxed{1}$＝30÷5＝6(cm)
ア＝$\boxed{4}$＝6×4＝24(cm)
DC＝$\boxed{3}$＝6×3＝18(cm) より イ＝50－18＝32(cm)

図３

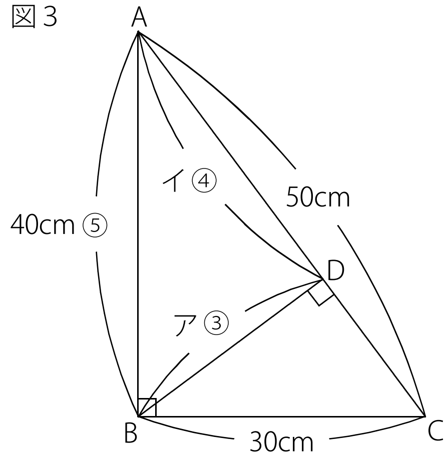
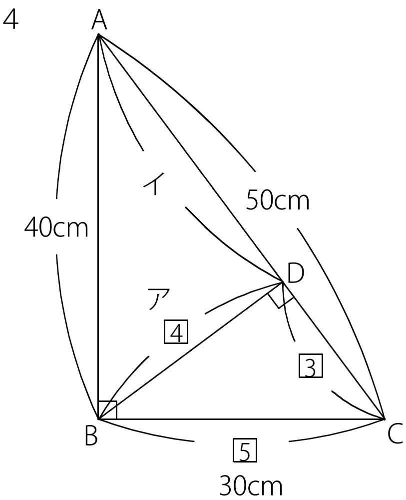
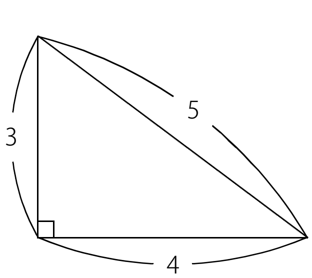
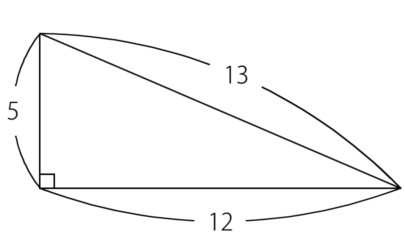


図４



※ 3辺の長さの比が 3：4：5 の直角三角形と 5：12：13 の直角三角形は受験算数で頻出です。





例題と解説

ポイントまとめ

・台形などの四角形であっても、補助線を引いて三角形の相似に着目するようにしましょう。

・複雑な図形では、どのように解けばよいのか、わかりづらい場合があります。
　そのような場合は、使うか使わないかは別として、求めることができる長さを求めて図に書きこむようにしましょう。

・3辺の長さの比が 3：4：5 の直角三角形と 5：12：13 の直角三角形は受験算数で頻出です。