



例題と解説

例題 1

時計の長針と短針が重なってから、次に重なるのは、何分後ですか

答え $65\frac{5}{11}$ 分後

[例題 1 の解説]

仮に12時ちょうどをはじめの状態として考えます。

このときは右図 1 のように長針と短針が重なっています。

長針は1時間(60分)で360度進むので、1分では $360 \div 60 = 6$ (度) 進みます。

短針は1時間(60分)で30度進むので、1分では $30 \div 60 = 0.5$ (度) 進みます。

1分で長針は短針に $6 - 0.5 = 5.5$ (度) 追いつきます。

次に重なるのは長針が短針に360度追いついたときなので

$360 \div 5.5 = 65\frac{5}{11}$ (分後) にふたたび重なります。

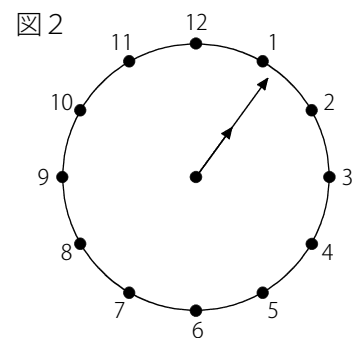
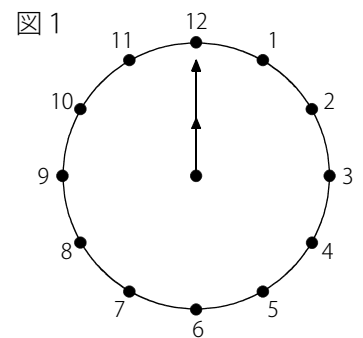
※何分何秒後か? という問いであれば $\frac{5}{11}$ 分 = $60\text{秒} \times \frac{5}{11} = \frac{300}{11}\text{秒} = 27\frac{3}{11}\text{秒}$ なので

65分 $27\frac{3}{11}$ 秒後となります。

$65\frac{5}{11}$ 分は1時間をこえているので、図 2 のように1時5分を少し過ぎたところで重なります。

※この次も同様に長針が短針に360度追いつけば重なるので、

普通の正しい時計であれば $65\frac{5}{11}$ 分ごとに長針と短針が重なることがわかります。





例題と解説

例題 2

午前10時から、時計の長針と短針が3回目に重なるのは午後何時何分ですか。

答え 午後1時 $5\frac{5}{11}$ 分

[例題 2 の解説]

時計の長針と短針が重なってから、次に重なるまでには、長針が短針に360度追いつけばいいので

$360 \div 5.5 = 65\frac{5}{11}$ (分後) にふたたび重なります。

つまり時計の長針と短針は重なってから $65\frac{5}{11}$ 分ごとに重なります。

午前10時をはじめの状態とします。右図のようになっています。

このとき短針は長針から時計回りに300度進んでいます。

1回目に重なるのは $300 \div 5.5 = 54\frac{6}{11}$ (分後) です。

1回目に重なってから2回目に重なるのは360度追いつけばいいので $360 \div 5.5 = 65\frac{5}{11}$ (分後)

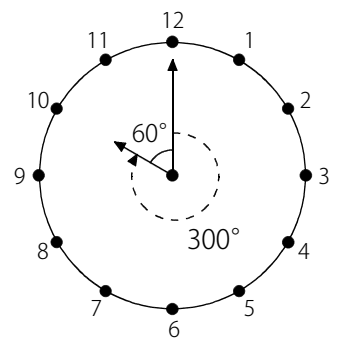
2回目に重なってから3回目に重なるのは360度追いつけばいいので $360 \div 5.5 = 65\frac{5}{11}$ (分後)

よって全部で $54\frac{6}{11} + 65\frac{5}{11} + 65\frac{5}{11} = 185\frac{5}{11}$ (分後) $= 3$ (時間) $5\frac{5}{11}$ (分後) なので3回目に重なるのは午後1時 $5\frac{5}{11}$ 分

(別解)

まとめて考えます。3回目までに長針は短針に $300 + 360 + 360 = 1020$ (度) 追いつけばいいので

$1020 \div 5.5 = 185\frac{5}{11}$ (分後) に3回目に重なります。よって午後1時 $5\frac{5}{11}$ 分





例題と解説

例題 3

午前8時から午後1時までの5時間の間に、時計の長針と短針は何回重なりますか。

答え 4回

[例題 3 の解説]

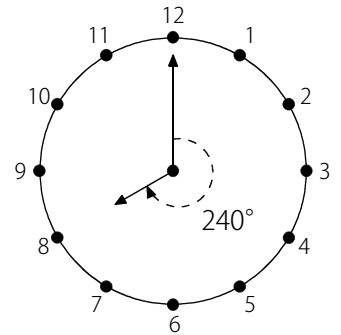
時計の長針と短針が重なってから、次に重なるまでには、長針が短針に360度追いつけばいいので

$360 \div 5.5 = 65\frac{5}{11}$ (分後) にふたたび重なります。

つまり時計の長針と短針は重なってから $65\frac{5}{11}$ 分ごとに重なります。 $65\frac{5}{11}$ 分 = 1時間 $5\frac{5}{11}$ 分

午前8時をはじめの状態とします。右図のようになっています。

このとき短針は長針から時計回りに240度進んでいます。



1回目 $240 \div 5.5 = 43\frac{7}{11}$ (分後) 午前8時 $43\frac{7}{11}$ 分

2回目 午前8時 $43\frac{7}{11}$ 分 + 1時間 $5\frac{5}{11}$ 分 = 午前9時 $49\frac{1}{11}$ 分

3回目 午前9時 $49\frac{1}{11}$ 分 + 1時間 $5\frac{5}{11}$ 分 = 午前10時 $54\frac{6}{11}$ 分

4回目 午前10時 $54\frac{6}{11}$ 分 + 1時間 $5\frac{5}{11}$ 分 = 正午12時

5回目 正午12時 + 1時間 $5\frac{5}{11}$ 分 = 午後1時 $5\frac{5}{11}$ 分 ← 午後1時をこえているので含みません。

よって全部で4回



例題と解説

(別解)

午前8時をはじめの状態とします。このとき短針は長針から時計回りに240度進んでいます。

よって1回目に重なるまでに $240 \div 5.5 = 43\frac{7}{11}$ (分) かかります。

5時間=300分 なので残りは $300 - 43\frac{7}{11} = 256\frac{4}{11}$ (分) です。

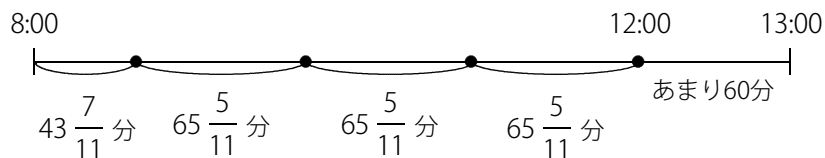
重なってから次に重なるまでに $360 \div 5.5 = 65\frac{5}{11}$ (分) かかるので、残りの $256\frac{4}{11}$ 分 で何回重なるかを求めます。

$$256\frac{4}{11} \div 65\frac{5}{11} = \frac{2820}{11} \div \frac{720}{11} = 3(\text{回})\text{あまり}60(\text{分})$$

よって1回目も加えて、全部で4回

※1回目を足しわすれないようにしましょう。

線分図で表すと下図のようになります。長針と短針が重なるときを●にしています。





例題と解説

例題 4

0時から24時の24時間で時計の長針は短針を何回追いこしますか。
ただし重なっている場合は追いこす回数に含まないものとします。

答え 21回

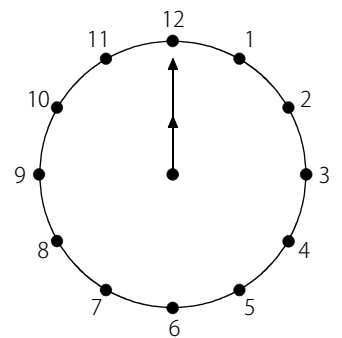
[例題 4 の解説]

0時をはじめの状態とします。

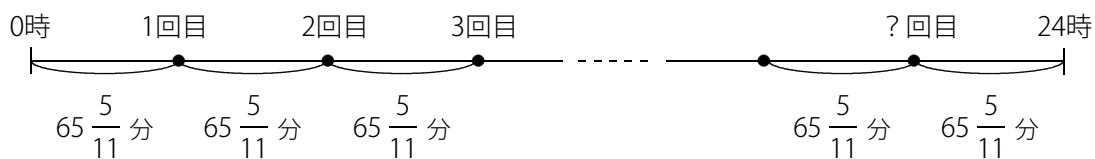
このときは右図のように長針と短針が重なっています。

「追いこす回数」なので、このはじめの状態は含みません。

また24時間後の24時も重なって終わるので「追いこす回数」には含みません。



植木算のように考えると、両端に木を植えない場合の木の本数と同じです。



24時間は $60 \times 24 = 1440$ (分) です。時計の長針と短針は重なってから $65\frac{5}{11}$ 分ごとに重なります。

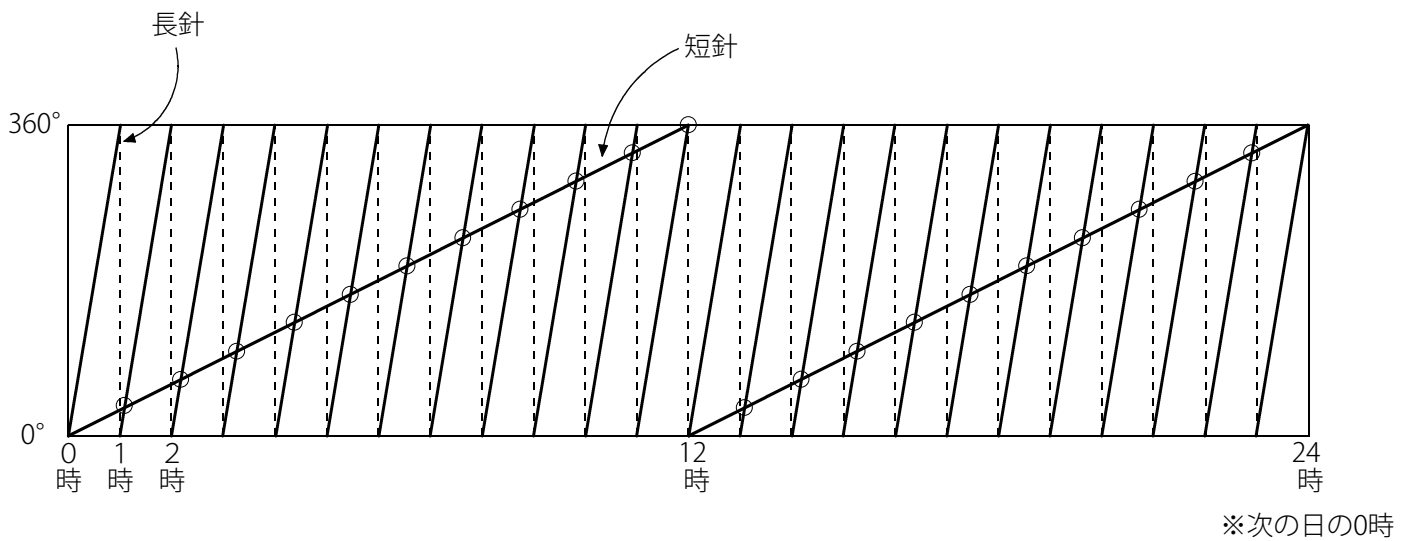
$$1440 \div 65\frac{5}{11} = 1440 \div \frac{720}{11} = 22 \leftarrow \text{間の数}$$

よって「追いこす回数」は $22 - 1 = 21$ (回)

※ダイヤグラムは次のようになります。確認しておきましょう。



例題と解説



長針は1時間で360度、短針は30度進むので、上図のようになります。

長針が短針を追いこすときを○で示しています。

例えば「午前0時から昼の12時ちょうどまでの12時間で時計の長針は短針を何回追いこしますか。」という問題であれば上のダイヤグラムより10回であることがわかります。

※0時と12時の重なりは含みません。

※「重なる回数」を求めるのか、もしくは「追いこす回数」を求めるのか。

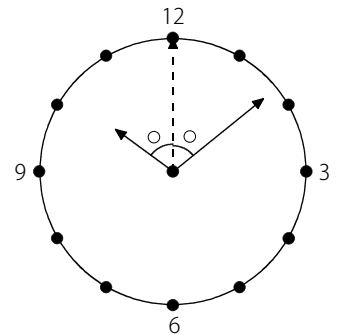
問題文をていねいに読んでまちがえないようにしましょう。



例題と解説

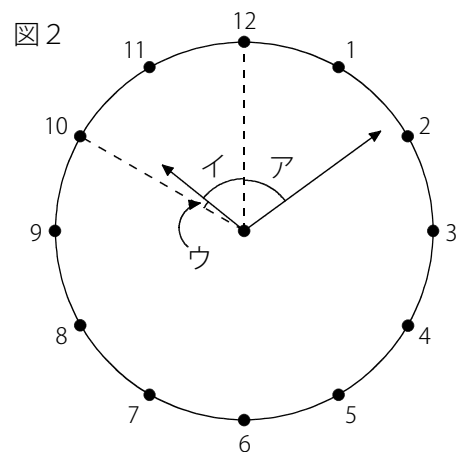
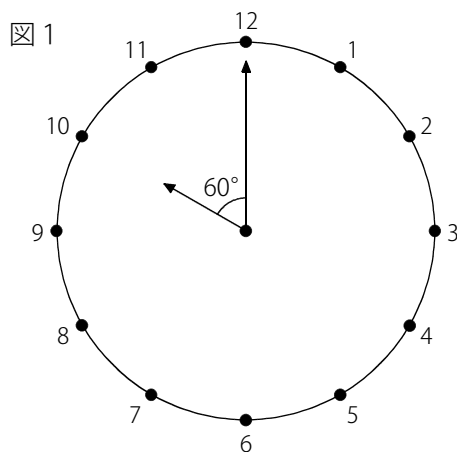
例題 5

右図のように10時から11時の間で、時計の長針と短針が12時の方向をはさんで同じ角度になるのは10時何分ですか。



答え 10時 $9\frac{3}{13}$ 分

[例題 5 の解説]



10時をはじめる状態とします。このとき図1のように長針と短針は60度はなれています。

ここから長針と短針が少しだけ進み、図2のようになって ア=イ となります。

図2の状態を10時□分とします。

長針は1分で6度進むので ア=イ=6×□(度) , 短針は1分で0.5度進むので ウ=0.5×□(度) です。

ここで イ+ウ に着目します。イ+ウ=60(度) です。

また イ+ウ=6×□+0.5×□ なので イ+ウ=6.5×□ となります。

$6.5 \times \square = 60(\text{度})$ なので $\square = 60 \div 6.5 = \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}(\text{分})$ より同じ角度になるのは10時 $9\frac{3}{13}$ 分であることがわかります。



例題と解説

(別解)

図 3

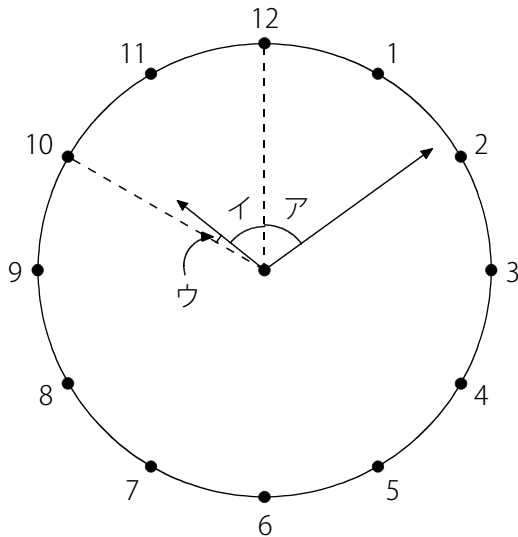
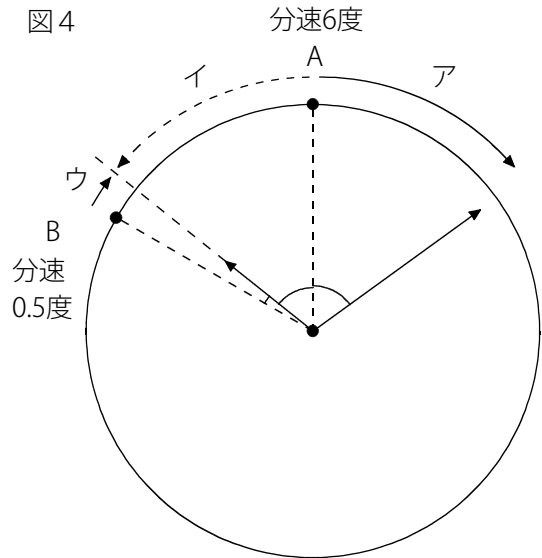


図 4



長針をA君，短針をB君として池の周りを回る旅人算と同じように考えます。

図 3 の状態を旅人算で考えると図 4 のようになります。

同じ時間でA君はア度進み、B君はウ度進みます。

アとイは同じ距離(角度)になるので、A君が反時計回りに回るとします。

するとA君とB君ははじめ60度はなれていて、何分後かに「出会う」ということになります。

この出会ったときが ア=イ のときです。「出会い」なので速さの和を利用します。

$$60 \div (6 + 0.5) = \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13} \text{ (分)} \text{ より同じ角度になるのは } 10\text{時}9\frac{3}{13}\text{分であることがわかります。}$$

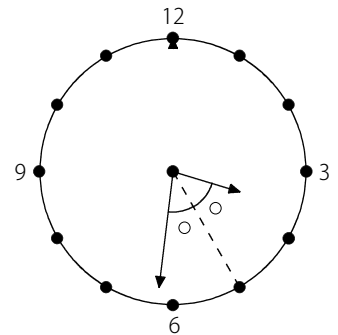
※ 多くの時計算の問題では「速さの差(5.5度)」を利用しますが、「同じ角度になる」タイプの問題では「速さの和」を利用するとわかりやすくなります。



例題と解説

例題6

右図のように3時から4時の間で、時計の長針と短針が5時の方向をはさんで同じ角度になるのは3時何分ですか。



答え 3時 $32\frac{4}{13}$ 分

[例題6の解説]

右図のように長針が進んだ角度をア，短針が進んだ角度をイとします。

5時の方向をはさんで同じ角度になるので $ウ = 30 + エ$

$イ + ウ = 60(\text{度})$ なので $ウ$ を $30 + エ$ に置きかえると

$$イ + 30 + エ = 60(\text{度})$$

簡単にするために左右から30度を引きます。

$$イ + エ = 30(\text{度}) \text{ であることがわかります。}$$

長針が進んだ角度は $ア = 180 + エ$

短針が進んだ角度は $イ$

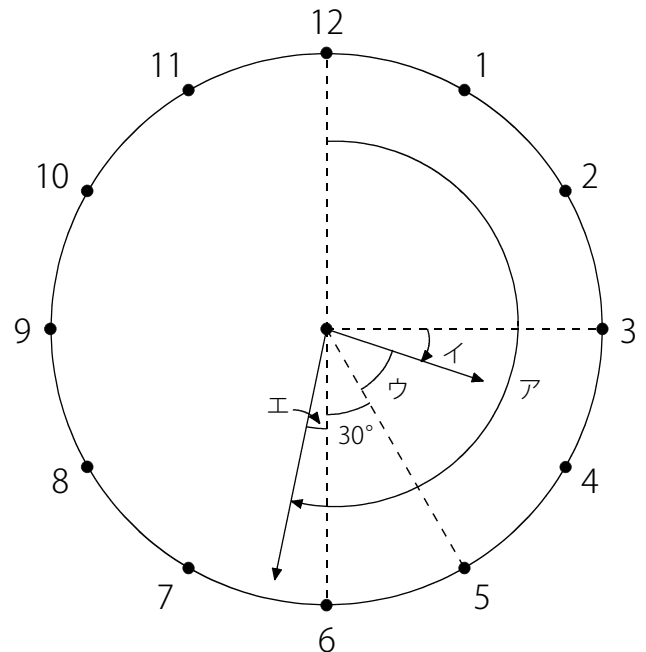
よって長針と短針が進んだ角度はあわせて

$$ア + イ = 180 + エ + イ \text{ となり } イ + エ = 30 \text{ なので}$$

$$ア + イ = 180 + 30 = 210(\text{度}) \text{ であることがわかります。}$$

$$\square \text{ 分であわせて } 210 \text{ 度進んだとすると } (6 + 0.5) \times \square = 210(\text{度}) \text{ となるので } \square = 210 \div 6.5 = \frac{420}{13} = 32\frac{4}{13}(\text{分})$$

よって長針と短針が5時の方向をはさんで同じ角度になるのは3時 $32\frac{4}{13}$ 分



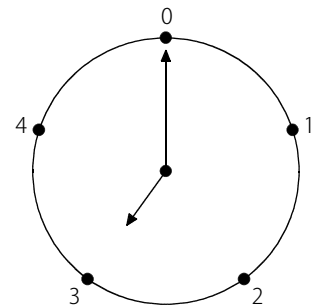


例題と解説

例題 7

1時間が80分で、短針は5時間で1周する右図のような時計があります。

右図は3時を表しています。3時と4時の間で長針と短針が重なるのは3時何分ですか。



答え 3時60分

[例題 7 の解説]

長針は80分で1周するので1分で $360 \div 80 = 4.5$ (度) 進みます。

短針は80分で $360 \div 5 = 72$ (度) 進むので1分で $72 \div 80 = 0.9$ (度) 進みます。

図 1 のとき短針は長針から時計回りに $72 \times 3 = 216$ (度) 進んでいます。

長針は短針に1分で $4.5 - 0.9 = 3.6$ (度) 追いつくので

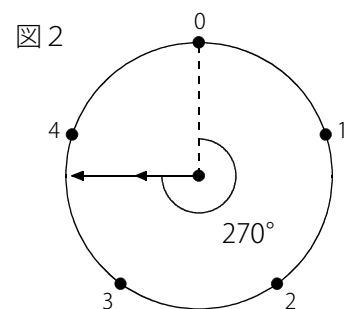
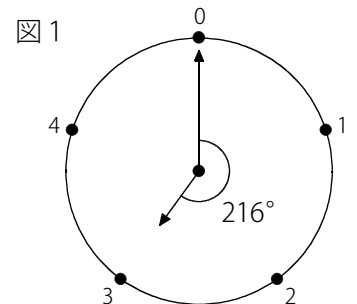
216度追いついて重なるまでにかかる時間は $216 \div 3.6 = 60$ (分)

よって3時と4時の間で長針と短針が重なるのは3時60分

※60分は80分の $\frac{3}{4}$ にあたるので $360 \times \frac{3}{4} = 270$ (度) となり右図 2 のように

長針と短針は真横に向いた状態で重なります。

※普通の時計ではない場合は長針と短針が1分で進む角度を求めてから問題を解きましょう。



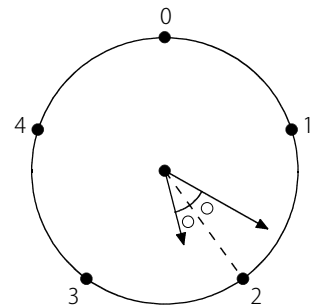


例題と解説

例題 8

1時間が80分で、短針は5時間で1周する時計があります。

右図のように2時から3時の間で、時計の長針と短針が2時の方向をはさんで同じ角度になるのは2時何分ですか。



答え 2時 $26\frac{2}{3}$ 分

[例題 8 の解説]

長針は80分で1周するので1分で $360 \div 80 = 4.5$ (度) 進みます。

短針は80分で $360 \div 5 = 72$ (度) 進むので1分で $72 \div 80 = 0.9$ (度) 進みます。

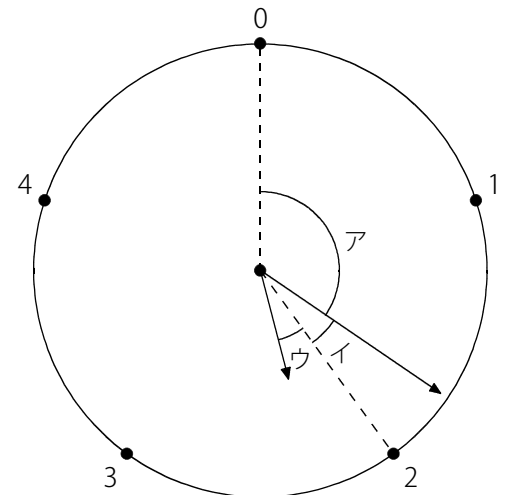
右図のように長針が進んだ角度をア，短針が進んだ角度をウとします。

長針と短針が進んだ角度の合計は ア+ウ です。

イとウは同じ角度なので

長針と短針が進んだ角度の合計は ア+ウ=ア+イ となります。

ア+イ は右図より $72 \times 2 = 144$ (度) です。



□分であわせて144度進んだとすると、長針と短針は1分であわせて $4.5 + 0.9 = 5.4$ (度) 進みます。

$$5.4 \times \square = 144(\text{度}) \text{ となるので } \square = 144 \div 5.4 = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}(\text{分})$$

よって長針と短針が2時の方向をはさんで同じ角度になるのは2時 $26\frac{2}{3}$ 分



ポイントまとめ

- 普通の正しい時計であれば $65\frac{5}{11}$ 分ごとに長針と短針が重なります。
- 多くの時計算の問題では「速さの差(5.5度)」を利用しますが、「同じ角度になる」タイプの問題では「速さの和」を利用するとわかりやすくなります。
- 普通の時計ではない場合は長針と短針が1分で進む角度を求めてから問題を解きましょう。