



例題と解説

例題 1

素数を小さい順に10個書きなさい。

答え 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

[例題 1 の解説]

そすう
素数は1とその数自身以外の約数を持たない1より大きな整数です。つまり約数が2個しかない数が素数です。

1は素数ではありません。

例えば 11の約数は1と11だけです。つまり11は素数です。

97の約数は1と97だけです。つまり97は素数です。

1から100までの素数は次のようになります。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

1から100までには素数が25個あり、1から100まででもっとも大きな素数は97です。

この問題では小さい順に10個なので 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 となります。



例題と解説

例題 2

100以上130以下の整数のうち、素数は何個ありますか。

答え 6個

[例題 2 の解説]

100以上130以下の素数は次の6個です。 101 , 103 , 107 , 109 , 113 , 127

素数かどうかをすばやく見分ける方法はありません。

2より大きな素数はすべて奇数です。

素数かどうかを見分けるときは、まずは3の倍数になっていないどうかに着目しましょう。

そして 5 , 7 , 11 などの素数で割り切れてしまわないかということを考えるといいでしょう。

例えば119は3の倍数ではありませんが、7の倍数なので素数ではありません。

(別解)

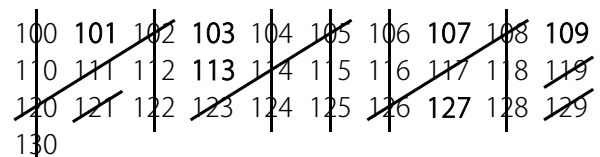
「エラトステネスのふるい」と呼ばれる「素数ではない整数を消していく方法」で素数を見つけます。

消していく場合は 2の倍数 , 3の倍数 , 5の倍数 , 7の倍数 , 11の倍数 , … というふうに小さい素数から順にその倍数を消していきます。

11の倍数まで消すと右図のようになります。

残っている数 101 , 103 , 107 , 109 , 113 , 127 が

100以上130以下の素数です。



ここで11より大きい素数の倍数(13や17の倍数など)はすでに消されているので考える必要はありません。

例えば13の倍数は $13 \times 8 = 104$ (2の倍数) , $13 \times 9 = 117$ (3の倍数) , $13 \times 10 = 130$ (2の倍数) なので、すでに消されています。 $13 \times 13 = 169$ なので169以上の整数で素数を見つける場合には13の倍数も消す必要がありますが、この問題では130以下の整数について調べるので $11 \times 11 = 121$ より11の倍数まで消せばよいということになります。



例題と解説

(参考)

「エラトステネスのふるい」は「素数の(2倍以上の)倍数は素数ではない」という考え方を利用しています。

2, 3, 5, 7, 11, 13, … という素数の2倍以上の倍数を順に消していき、残った数が素数ということになります。

エラトステネスのふるいを利用して1以上50以下の整数から素数を見つけてみましょう。

まず1は素数ではないので2から50までの整数を書き、

下図1のように2以外の2の倍数を消します。そして次に下図2のように3以外の3の倍数を消します。

図1

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

図2

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

同様に5の倍数、7の倍数も消すと右図3のようになります。

図3

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

残っている数 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 が
1以上50以下の素数ということになります。

すばやく素数を見つける方法ではありませんが、正確に素数を見つける手法として覚えておくといいでしょう。



例題と解説

例題 3

60を素因数分解すると $60=2\times 2\times 3\times 5$ となります。540を素因数分解しなさい。

答え $2\times 2\times 3\times 3\times 3\times 5$

[例題 3 の解説]

整数を素数の積の形で表すことを^{そしんすうぶんかい}素因数分解といいます。

素因数分解をするときは右図のように整数を素数で割っていきます。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60} \\ 2 \overline{) 30} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{よって} \\ 60=2\times 2\times 3\times 5 \end{array}$$

同じように540を素因数分解すると右図のようになります。

$$540=2\times 2\times 3\times 3\times 3\times 5$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 540} \\ 2 \overline{) 270} \\ 3 \overline{) 135} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$



例題 4

次の問いに答えなさい。

- (1) 1から10までの整数の積は2で何回割ることができますか。
- (2) 1から10までの整数の積は3で何回割ることができますか。
- (3) 1から10までの整数の積は5で何回割ることができますか。
- (4) 1から10までの整数の積は6で何回割ることができますか。

答え (1) 8回 (2) 4回 (3) 2回 (4) 4回

[例題 4 の解説]

- (1) 1から10までの整数の積は $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 = 3628800$ です。

$$3628800 \div 2 = 1814400$$

$$1814400 \div 2 = 907200$$

$$907200 \div 2 = 453600$$

$$453600 \div 2 = 226800$$

$$226800 \div 2 = 113400$$

$$113400 \div 2 = 56700$$

$$56700 \div 2 = 28350$$

$$28350 \div 2 = 14175 \quad \leftarrow \text{奇数なのでこれ以上2で割ることはできません。}$$

よって全部で8回割ることができます。

ただしこのように計算をして求めるのは時間がかかります。そこで素数の考え方を利用します。

まずは1から4までの整数の積が2で何回割れるかを考えてみます。

1から4までの素因数分解は次のようになります。

$$1=1, 2=2, 3=3, 4=2 \times 2$$

つまり $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times (2 \times 2)$ となります。

この中に2は3個あるので、1から4までの積は2で3回割ることができるということがわかります。



例題と解説

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 4 \\ || & & || & & || & & || \\ 1 & & 2 & & 3 & & 2 \\ & & & & & & \times \\ & & & & & & 2 \end{array}$$

2が3個なので2で3回割ることができます。

では1から10までの積について同じように考えます。

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 4 & \times & 5 & \times & 6 & \times & 7 & \times & 8 & \times & 9 & \times & 10 \\ || & & || & & || & & || & & || & & || & & || & & || & & || & & || \\ 1 & & 2 & & 3 & & 2 & & 5 & & 2 & & 7 & & 2 & & 3 & & 2 \\ & & & & & & \times & & & & \times & & & & \times & & \times & & \times \\ & & & & & & 2 & & & & 3 & & & & 2 & & 3 & & 5 \\ & & & & & & & & & & & & & & \times & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & 2 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

2が8個なので2で8回割ることができます。

(別解)

1から10までに2で1回割ることのできる数は $10 \div 2 = 5$ (個) より5個あります。

1から10までに2で2回割ることのできる数は $5 \div 2 = 2$ (個)…1 より2個あります。

1から10までに2で3回割ることのできる数は $2 \div 2 = 1$ (個) より1個あります。

よって $5 + 2 + 1 = 8$ (個) なので2で8回割ることができます。

これは右図のようにあまりを無視して2で割っていくことで
求めることができます。

これは下図の考え方をさらにすばやく求めるための方法です。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 4 & \times & 5 & \times & 6 & \times & 7 & \times & 8 & \times & 9 & \times & 10 \\ & & || & & & & || & & & & || & & & & || & & & & || \\ & & 2 & & & & 2 & & & & 2 & & & & 2 & & & & 2 \\ & & & & & & \times & & & & \times & & & & \times & & & & \times \\ & & & & & & 2 & & & & 3 & & & & 2 & & & & 5 \\ & & & & & & & & & & & & & & \times & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & 2 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array} \left. \begin{array}{l} \leftarrow 5\text{個} \\ \leftarrow 2\text{個} \\ \leftarrow 1\text{個} \end{array} \right\} 8\text{個}$$

$$\left. \begin{array}{r} 2 \overline{) 10} \\ 2 \overline{) 5} \\ 2 \overline{) 2 \cdots 1} \\ \quad 1 \end{array} \right\} 5 + 2 + 1 = 8(\text{個})$$

↑ 覚えておきましょう。



例題と解説

(2)

1	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6	×	7	×	8	×	9	×	10
1		2		3		2		5		2		7		2		3		2
						×				×				×		×		×
						2				3				2		3		5
														×				
														2				

3が4個なので3で4回割ることができます。

(別解)

右図のようになります。

よって3で4回割ることができます。

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 10} \\
 3 \overline{) 3} \cdots 1 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3 \overline{) 10} \\ 3 \overline{) 3} \cdots 1 \\ \hline 1 \end{array}} \right\} 3+1=4(\text{個})$$

(3)

1	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6	×	7	×	8	×	9	×	10
1		2		3		2		5		2		7		2		3		2
						×				×				×		×		×
						2				3				2		3		5
														×				
														2				

5が2個なので5で2回割ることができます。

(別解)

右図のようになります。

よって5で2回割ることができます。

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 10} \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \quad 2(\text{個})$$



例題と解説

- (4) 右図のようにして6で1回割ることができるとするのは
まちがいです。

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 10} \\ 1 \cdots 4 \end{array} \quad 1(\text{個})$$

6は素数ではありません。

6を素因数分解すると $6=2 \times 3$ です。

つまり6は「2が1個と3が1個」のセットになっています。

よって1から10までの積の中で「2が1個と3が1個」が何セットできるかを考えます。

$$\left. \begin{array}{r} 2 \overline{) 10} \\ 2 \overline{) 5} \\ 2 \overline{) 2 \cdots 1} \\ 1 \end{array} \right\} 5+2+1=8(\text{個})$$

$$\left. \begin{array}{r} 3 \overline{) 10} \\ 3 \overline{) 3 \cdots 1} \\ 1 \end{array} \right\} 3+1=4(\text{個})$$

1から10までに2は8個、3は4個あることがわかります。

よって右図のようになるので4セット。

つまり1から10までの積は6で4回割ることができます。

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$$

4セット

2が8個で3が4個です。少ないほうは4個なので4セットできる、と考えてもかまいません。

「1から○までの整数の積が□で何回割ることができるか」という問題では□が素数かどうかに注意しましょう。



例題と解説

例題 5

次の問いに答えなさい。

- (1) 1から100までの整数の積は2で何回割ることができますか。
- (2) 1から100までの整数の積は3で何回割ることができますか。
- (3) 1から100までの整数の積は4で何回割ることができますか。
- (4) 1から100までの整数の積は5で何回割ることができますか。
- (5) 1から100までの整数の積は12で何回割ることができますか。
- (6) 1から100までの整数の積は40で何回割ることができますか。

答え (1) 97回 (2) 48回 (3) 48回 (4) 24回 (5) 48回 (6) 24回

[例題 5 の解説]

- (1) 右図のようになります。

よって2で97回割ることができます。

$$\left. \begin{array}{r} 2 \overline{) 100} \\ 2 \overline{) 50} \\ 2 \overline{) 25} \\ 2 \overline{) 12} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 6} \\ 2 \overline{) 3} \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{array} \right\} 50+25+12+6+3+1=97(\text{個})$$



例題と解説

(2) 右図のようになります。

よって3で48回割ることができます。

$$\left. \begin{array}{r} 3 \overline{) 100} \\ 3 \overline{) 33} \\ 3 \overline{) 11} \\ 3 \overline{) 3} \cdots 2 \\ 1 \cdots 1 \end{array} \right\} 33+11+3+1=48(\text{個})$$

(3) 4は素数ではありません。

4を素因数分解すると $4=2 \times 2$ です。

つまり「2が2個」が何セットできるかを考えます。

右図のように2は97個あります。

$97(\text{個}) \div 2(\text{個}) = 48(\text{セット}) \cdots 1(\text{個})$

よって 4で48回割ることができます。

$$\left. \begin{array}{r} 2 \overline{) 100} \\ 2 \overline{) 50} \\ 2 \overline{) 25} \\ 2 \overline{) 12} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 6} \\ 2 \overline{) 3} \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{array} \right\} 50+25+12+6+3+1=97(\text{個})$$

(4) 右図のようになります。

よって5で24回割ることができます。

$$\left. \begin{array}{r} 5 \overline{) 100} \\ 5 \overline{) 20} \\ 4 \end{array} \right\} 20+4=24(\text{個})$$



例題と解説

(5) 12は素数ではありません。

12を素因数分解すると $12=2 \times 2 \times 3$ です。

つまり「2が2個と3が1個」が何セットできるかを考えます。

下図のように2は97個、3は48個あります。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 100} \\
 2 \overline{) 50} \\
 2 \overline{) 25} \\
 2 \overline{) 12} \dots 1 \\
 2 \overline{) 6} \\
 2 \overline{) 3} \dots 1 \\
 1 \dots 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2 \overline{) 100} \\ 2 \overline{) 50} \\ 2 \overline{) 25} \\ 2 \overline{) 12} \dots 1 \\ 2 \overline{) 6} \\ 2 \overline{) 3} \dots 1 \\ 1 \dots 1 \end{array}} \right\} 50+25+12+6+3+1=97(\text{個})$$

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 100} \\
 3 \overline{) 33} \\
 3 \overline{) 11} \\
 3 \overline{) 3} \dots 2 \\
 1 \dots 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3 \overline{) 100} \\ 3 \overline{) 33} \\ 3 \overline{) 11} \\ 3 \overline{) 3} \dots 2 \\ 1 \dots 1 \end{array}} \right\} 33+11+3+1=48(\text{個})$$

まず「2が2個」は $97(\text{個}) \div 2(\text{個}) = 48(\text{セット}) \dots 1(\text{個})$ より 48セットあります。

そして3は48個あるので、「2が2個と3が1個」はあまりなくちょうど48セットあります。

よって 12で48回割ることができます。



例題と解説

(6) 40は素数ではありません。

40を素因数分解すると $40=2\times 2\times 2\times 5$ です。

つまり「2が3個と5が1個」が何セットできるかを考えます。

下図のように2は97個、5は24個あります。

$$\left. \begin{array}{r} 2 \overline{) 100} \\ 2 \overline{) 50} \\ 2 \overline{) 25} \\ 2 \overline{) 12} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 6} \\ 2 \overline{) 3} \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 \end{array} \right\} 50+25+12+6+3+1=97(\text{個})$$
$$\left. \begin{array}{r} 5 \overline{) 100} \\ 5 \overline{) 20} \\ 4 \end{array} \right\} 20+4=24(\text{個})$$

まず「2が3個」は $97(\text{個})\div 3(\text{個})=32(\text{セット})\cdots 1(\text{個})$ より 32セットあります。

そして5は24個なので、「2が3個と5が1個」は少ないほうの個数と同じで24セットです。

よって 40で24回割ることができます。

中学受験では頻出^{ひんしゅつ}ですのでこの解き方をマスターしましょう。



例題と解説

例題 6

次の問いに答えなさい。

- (1) 1から50までの整数の積は5で何回割ることができますか。
- (2) 1から50までの整数の積は10で何回割ることができますか。
- (3) 1から50までの整数の積は一の位から0が連続して何個ならびますか。

答え (1) 12回 (2) 12回 (3) 12回

[例題 6 の解説]

- (1) 右図のようになります。

よって5で12回割ることができます。

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 50} \\ 5 \overline{) 10} \\ \quad 2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 5 \overline{) 50} \\ 5 \overline{) 10} \\ \quad 2 \end{array}} \right\} 10+2=12(\text{個})$$

- (2) 10を素因数分解すると $10=2 \times 5$ です。

つまり「2が1個と5が1個」が何セットできるかを考えます。

下図のように2は97個、5は12個あります。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 50} \\ 2 \overline{) 25} \\ 2 \overline{) 12} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 6} \\ 2 \overline{) 3} \cdots 1 \\ \quad 1 \cdots 1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2 \overline{) 50} \\ 2 \overline{) 25} \\ 2 \overline{) 12} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 6} \\ 2 \overline{) 3} \cdots 1 \\ \quad 1 \cdots 1 \end{array}} \right\} 25+12+6+3+1=47(\text{個})$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 50} \\ 5 \overline{) 10} \\ \quad 2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 5 \overline{) 50} \\ 5 \overline{) 10} \\ \quad 2 \end{array}} \right\} 10+2=12(\text{個})$$

「2が1個と5が1個」は少ないほうの個数と同じで12セットです。

よって10で12回割ることができます。



例題と解説

(3) 例えば 100は10で2回割ることができます。

1000は10で3回割ることができます。

1000000は10で6回割ることができます。

つまり「一の位から0が連続していくつならばか」と「10で何回割ることができるか」は同じです。

(2) で求めたように10で12回割ることができるので、一の位から0は連続して12個ならびます。

また1から○までの整数の積のとき、

「10で何回割ることができるか」と「5で何回割ることができるか」は同じです。

なぜなら $10=2\times 5$ ですが2の個数は5の個数より多いので、 2×5 のセットは5の個数と同じだからです。



例題と解説

例題 7

1から100までの整数のうち約数の個数が3個のものはいくつありますか。

答え 4個

[例題 7 の解説]

約数の個数を1から順に調べてみます。

1 ... 1	1個	22 ... 1 , 2 , 11 , 22	4個
2 ... 1 , 2	2個	23 ... 1 , 23	2個
3 ... 1 , 3	2個	24 ... 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , 24	8個
4 ... 1 , 2 , 4	3個	25 ... 1 , 5 , 25	3個
5 ... 1 , 5	2個	26 ... 1 , 2 , 13 , 26	4個
6 ... 1 , 2 , 3 , 6	4個	27 ... 1 , 3 , 9 , 27	4個
7 ... 1 , 7	2個	28 ... 1 , 2 , 4 , 7 , 14 , 28	6個
8 ... 1 , 2 , 4 , 8	4個	29 ... 1 , 29	2個
9 ... 1 , 3 , 9	3個	30 ... 1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 15 , 30	8個
10 ... 1 , 2 , 5 , 10	4個	31 ... 1 , 31	2個
11 ... 1 , 11	2個	32 ... 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32	6個
12 ... 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12	6個	33 ... 1 , 3 , 11 , 33	4個
13 ... 1 , 13	2個	34 ... 1 , 2 , 17 , 34	4個
14 ... 1 , 2 , 7 , 14	4個	35 ... 1 , 5 , 7 , 35	4個
15 ... 1 , 3 , 5 , 15	4個	36 ... 1 , 2 , 3 , 4 , 9 , 12 , 18 , 36	8個
16 ... 1 , 2 , 4 , 8 , 16	5個		
17 ... 1 , 17	2個		
18 ... 1 , 2 , 3 , 6 , 9 , 18	6個		
19 ... 1 , 19	2個		
20 ... 1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 20	6個		
21 ... 1 , 3 , 7 , 21	4個		



例題と解説

1から36まで書き出すと約数が3個の整数は4と9と25の3個あることがわかりました。

ここで4と9と25がどのような数であるかを考えてみましょう

$$4=2\times 2$$

$$9=3\times 3$$

$$25=5\times 5$$

となっています。つまり同じ数を2回かけてできる数、四角数（^{しかくすう}平方数）になっていることがわかります。

しかし $4\times 4=16$ や $6\times 6=36$ のように16や36も四角数ですが約数は3個ではありません。

約数が3個というのは特別な数で、**約数が3個の整数は素数の四角数**です。

4や6は素数ではないので $4\times 4=16$ や $6\times 6=36$ の約数の個数は3個ではなかったということです。

では1から100までで素数の四角数になっている整数を書き出します。

$$2\times 2=4$$

$$3\times 3=9$$

$$5\times 5=25$$

$$7\times 7=49$$

これ以上はありません。よって 4 , 9 , 25 , 49の4個です。

まとめておきます。

四角数であれば約数の個数は奇数個です。

さらにその中でも**素数の四角数であれば約数は3個**です。

例えば 11は素数なので $11\times 11=121$ の約数は 1 , 11 , 121 の3個です。



ポイントまとめ

- ・ ^{そ すう}素数は1とその数自身以外の約数を持たない1より大きな整数です。つまり約数が2個しかない数が素数です。
- ・ 1は素数ではありません。
- ・ 整数を素数の積の形で表すことを^{そ いんすうぶんかい}素因数分解といいます。
- ・ 「1から○まで整数の積が□で何回割ることができるか」という問題では□が素数かどうかに注意しましょう。
- ・ □が素数でないときは□の素因数分解のセットが何セットできるかを考えます。
- ・ 「一の位から0が連続していくつならぶか」と「10で何回割ることができるか」は同じです。
- ・ また1から○までの整数の積のとき、「10で何回割ることができるか」と「5で何回割ることができるか」は同じです。
- ・ 約数が3個の整数は素数の四角数です。
- ・ 四角数であれば約数の個数は奇数個です。